Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 15 Nomor 1 Juni 2018 (Halaman 11 - 19)

ISSN : 2450 – 766X

PELABELAN $L(d,2,1)$ PADA OPERASI KOMPLEMEN DAN KORONA GRAF LINTASAN DAN SIKLUS

R. Natalia[1], I. W. Sudarsana[2], dan S. Musdalifah[3]

[1]Program Studi Matematika Jurusan Matematika
[2,3] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tadulako
Jalan Sukarno-Hatta Km. 9 Palu 94118, Indonesia
[1]reginatalia27@gmail.com, [2]sudarsanaiwayan@yahoo.co.id, [3]selvymusdalifah@yahoo.com

ABSTRACT

Let G be a graph with p vertices and q edges. An $L(d,2,1)$ labeling of graph G is a function of $f: V \to \{1,2,\cdots,k_d\}$ such that the following condition $|f(u)-f(v)| \geq d$, for $d(u,v)=1, |f(u)-f(v)| \geq 2$, where $d(u,v)$ denoted the on distance of two vertices u and v $d(u,v)=2$, and $|f(u)-f(v)| \geq 1$, for $d(u,v)=3$. A number k_d is called the span of $L(d,2,1)$ labeling, if k_d is the largest label vertex of $L(d,2,1)$ labeling. Notation $k_d(G)$ states that the smallest span of all $L(d,2,1)$ labeling on a graph G. An injective labeling $L(d,2,1)$ is called $L^{'}(d,2,1)$ and a minimum span of all labeling $L^{'}(d,2,1)$ denoted by $k_d^{'}(G)$. A graph G which has $L^{'}(d,2,1)$ labeling is called the $L^{'}(d,2,1)$ graph. In this paper we study of such labeling by considering complement of path and cycle. The result showed that complement of path $(\overline{P_n})$ has $k_d(\overline{P_n}) = 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$, for $n = 5,7,9,\ldots$ and $k_d(\overline{P_n}) = 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$, for $n = 4,6,8,\ldots$ and complement of the cycle $(\overline{C_n})$ has $k_d(\overline{C_n}) = 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$, for $n = 5,7,9,\ldots$ and $k_d(\overline{C_n}) = 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$, for $n = 6,8,10,\ldots$ and K_1 corona of two paths $(K_1 \odot 2P_n)$ has $k_d(K_1 \odot 2P_n) = d + 4n - 1$. Therefor, the complement of paths $(\overline{P_n})$, the complement of cycle $(\overline{C_n})$, and K_1 corona of two path $(K_1 \odot 2P_n)$ are $L^{'}(d,2,1)$ graph.

Keywords : **Complement of Cycle Graph $(\overline{\mathbf{C_n}})$, Complement of Path Graph $(\overline{\mathbf{P_n}})$, Corona of Two Path Graph $(\mathbf{K_1 \odot 2P_n})$, $\mathbf{L(d,2,1)}$ Labeling, $\mathbf{L^{'}(d,2,1)}$ Labeling**

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf dengan p titik dan q sisi. Pelabelan $L(d,2,1)$ pada graf G adalah fungsi $f: V \to \{1,2,\cdots,k_d\}$ yang memenuhi kondisi $|f(u)-f(v)| \geq d$, jika $d(u,v)=1, |f(u)-f(v)| \geq 2$, jika $d(u,v)=2$, dan $|f(u)-f(v)| \geq 1$, jika $d(u,v)=3$. Suatu bilangan k_d disebut span dari pelabelan $L(d,2,1)$, jika k_d adalah label titik terbesar atas pelabelan $L(d,2,1)$. Notasi $k_d(G)$ menyatakan span terkecil atas semua pelabelan $L(d,2,1)$ pada graf G. Pelabelan $L(d,2,1)$ yang injektif disebut pelabelan $L'(d,2,1)$ dan minimal span atas semua pelabelan $L'(d,2,1)$ dinotasikan $k'_d(G)$. Sebuah graf G yang mempunyai pelabelan $L'(d,2,1)$ dinamakan graf $L'(d,2,1)$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa komplemen dari graf lintasan $(\overline{P_n})$ dengan $k_d(\overline{P_n}) = 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$, untuk $n = 5,7,9,\ldots$ dan $k_d(\overline{P_n}) = 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$, untuk $n = 4,6,8,\ldots$ dan komplemen pada graf siklus $(\overline{C_n})$ dengan $k_d(\overline{C_n}) = 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$ untuk, $n = 5,7,9,\ldots$ dan $k_d(\overline{C_n}) = 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$, untuk $n = 6,8,10,\ldots$ dan K_1 korona dua graf lintasan $(K_1 \odot 2P_n)$ dengan $k_d(K_1 \odot 2P_n) = d + 4n - 1$. Dengan demikian, komplemen dari graf lintasan $(\overline{P_n})$, komplemen pada graf siklus $(\overline{C_n})$, dan K_1 korona dua graf lintasan $(K_1 \odot 2P_n)$ adalah graf $L'(d,2,1)$.

Kata kunci : **Komplemen dari Graf Siklus $(\overline{\mathbf{C_n}})$, Komplemen dari Graf Lintasan $(\overline{\mathbf{P_n}})$, $\mathbf{K_1}$ Korona Dua Graf Lintasan $(\mathbf{K_1 \odot 2P_n})$, Pelabelan $\mathbf{L(d,2,1)}$, Pelabelan $\mathbf{L'(d,2,1)}$**

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dari teori graf yang mendapat perhatian khusus karena model-model yang ada dalam teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, misalnya pada jaringan komunikasi, transportasi, navigasi, geografis, penyimpanan data komputer, dan riset operasi. Pelabelan graf merupakan pemberian label pada elemen-elemen tertentu dari graf tersebut dengan menggunakan bilangan positif. Jika yang diberi label hanya titik (*vertex*) saja, maka pelabelannya disebut pelabelan titik.jika yang diberi label hanya sisi (*edge*) saja, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Sedangkan jika keduanya, titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan total.

Komplemen suatu graf G dinotasikan dengan $\bar{G}$ dengan n titik adalah suatu graf sederhana dengan titik-titik $\bar{G}$ sama dengan titik-titik G, jadi $V(G) = V(\bar{G})$. Sisi-sisi pada $\bar{G}$ adalah komplemen sisi-sisi G terhadap graf lengkapnya. Berarti titik-titik yang dihubungkan dengan sisi G tidak berhubungan dalam $\bar{G}$ dan sebaliknya titik-titik yang berhubungan dalam G menjadi tidak berhubungan dalam $\bar{G}$ (dengan kata lain sisi yang ada pada G tidak ada di $\bar{G}$). Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua buah graf, hasil operasi korona pada graf G_1 terhadap G_2 dinotasikan dengan $G_1 \odot G_2$ adalah graf korona yang diperoleh dengan mengambil m graf G_2, sebut ${G_2}^1, {G_2}^2, \dots, {G_2}^m$ dimana m adalah banyak titik graf G_1. Kemudian menghubungkan titik ke-i dari G_1 ke setiap titik di ${G_2}^{(i)}$ dimana $i = 1,2,\dots,m$ (Anwar dkk, 2015).

Komplemen dari graf lintasan dinotasikan dengan $\overline{P_n}$ dimana titik-titik $\overline{P_n}$ sama dengan titik-titik P_n, jadi $V(P_n) = V(\overline{P_n})$. Sisi-sisi pada $\overline{P_n}$ adalah komplemen sisi-sisi P_n. Berarti titik-titik yang dihubungkan dengan sisi P_n tidak berhubungan dalam $\overline{P_n}$ dan sebaliknya titik-titik yang berhubungan dalam P_n menjadi tidak berhubungan dalam $\overline{P_n}$ (dengan kata lain sisi yang ada pada P_n tidak ada di $\overline{P_n}$). Komplemen dari graf siklus dinotasikan dengan $\overline{C_n}$ dimana titik-titik $\overline{C_n}$ sama dengan titik-titik C_n, jadi $V(C_n) = V(\overline{C_n})$. Sisi-sisi pada $\overline{C_n}$ adalah komplemen sisi-sisi C_n. Berarti titik-titik yang dihubungkan dengan sisi C_n tidak berhubungan dalam $\overline{C_n}$ dan sebaliknya titik-titik yang berhubungan dalam C_n menjadi tidak berhubungan dalam $\overline{C_n}$ (dengan kata lain sisi yang ada pada C_n tidak ada di $\overline{C_n}$). Graf $K_1 \odot 2P_n$ merupakan graf yang dibentuk dari graf K_1 dikoronakan dengan dua graf lintasan $(2P_n)$, dengan demikian graf $K_1 \odot 2P_n$ mempunyai $2n + 1$ titik dan $2(2n - 1)$ sisi.

Pelabelan $L(d, 2,1)$ didefinisikan sebagai pemberian label pada titik suatu graf dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1,2 \cdots\}$ sehingga jarak label dari dua titik yang saling bertetangga paling sedikit d, jika dua titik dengan jarak dua maka memiliki selisih label paling sedikit dua, dan jika dua titik dengan jarak tiga maka memiliki selisih label paling sedikit satu. Bilangan pelabelan $L(d, 2,1)$ dinotasikan dengan $k_d(G)$ yang merupakan bilangan asli terkecil dari k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan $L(d, 2,1)$ dengan k_d

sebagai label maksimum (Indriati dkk, 2012). Pelabelan $L(d, 2,1)$ sudah dilakukan pada beberapa kelas graf oleh diantaranya graf lintasan, graf lengkap, graf bipartite, dan graf siklus $d \geq 3$ (Clipperton, 2008). Pada tahun 2012, Indriati dkk, telah melakukan penelitian pada graf bintang, graf matahari dan graf roda. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf kipas, graf roda, graf teratai, graf $K_1 \odot (P_n \cup F_n)$ dan graf $K_1 \odot tC_n$ (Fatimah, 2016). Pelabelan $L(3,2,1)$ pada graf pohon, Cartesian product, Power, graf lintasan, graf siklus (Ma-Lian Chia dkk, 2011). Pelabelan $\mathrm{L}(3,2,1)$ pada Graf Kite, Graf Sun, dan Graf Wheel (Novita, 2012). Namun untuk hasil operasi komplemen dan korona graf lintasan dan silklus merupakan masalah terbuka. Oleh karena itu, pada artikel ini akan di bahas tentang pelabelan $L'(d, 2,1)$ pada operasi komplemen dan korona graf lintasan dan siklus.

1.2. Batasan Masalah

Dari penelitian ini, observasi yang dapat dilakukan pada beberapa graf adalah pertama komplemen dari graf lintasan $(\overline{P_n})$, dimana $n \geq 4$ dan $d \geq 4$, kedua komplemen dari graf siklus $(\overline{C_n})$, dimana $n \geq 5$ dan $d \geq 4$, ketiga graf K_1 korona dua graf lintasan $(K_1 \odot 2P_n)$, dimana $n \geq 2$ dan $d \geq 3$.

II. METODE PENELITIAN

1. Memulai penelitian.
2. Menotasikan titik pada graf $\overline{P_n}$, $\overline{C_n}$, dan $K_1 \odot 2P_n$.
3. Memberikan label pada titik dari graf $\overline{P_n}$, $\overline{C_n}$, dan $K_1 \odot 2P_n$.
4. Membuat formulasi dari pelabelan $L(d, 2,1)$ pada graf $\overline{P_n}$, $\overline{C_n}$, dan $K_1 \odot 2P_n$.
5. Mencari nilai $k_d{}'(G)$dengan G adalah graf $\overline{P_n}$, $\overline{C_n}$, dan $K_1 \odot 2P_n$.
6. Membuat bukti graf $\overline{P_n}$, $\overline{C_n}$, dan $K_1 \odot 2P_n$ mempunyai formula $k_d{}'(G)$ dengan G adalah graf $\overline{P_n}$, $\overline{C_n}$, dan $K_1 \odot 2P_n$.
7. Kesimpulan.
8. Selesai.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas pelabelan $L(d, 2,1)$ pada komplemen dari graf lintasan $(\overline{P_n})$ dan komplemen dari graf siklus $(\overline{C_n})$ serta graf K_1 dikoronakan dengan dua graf lintasan $(K_1 \odot 2P_n)$. Sebelum itu, diberikan definisi korona M. isalkan G_1 dan G_2 adalah dua buah graf, hasil operasi korona pada graf G_1 terhadap G_2 dinotasikan dengan $G_1 \odot G_2$ adalah graf korona yang diperoleh dengan mengambil m graf G_2, sebut $G_2{}^1, G_2{}^2, \ldots, G_2{}^m$ dimana m adalah banyak titik graf G_1. Kemudian menghubungkan titik ke-i dari G_1 ke setiap titik di $G_2{}^{(i)}$ dimana $i = 1,2, \ldots, m$ (Anwar dkk, 2015).

Definisi 1: Pelabelan $L(d, 2,1)$ pada graf G adalah fungsi $f: V \to N$ yang memenuhi kondisi $(1). |f(u) - f(v)| \geq d$, jika $D(u, v) = 1, (2). |f(u) - f(v)| \geq 2$, jika $D(u, v) = 2$, $(3). |f(u) - f(v)| \geq 1$, jika $D(u, v) = 3$. Bilangan pelabelan $L(d, 2,1)$ disimbolkan $k_d(G)$, dari graf G

adalah bilangan asli terkecil k_d sedemikian sehingga G memiliki pelabelan $L(d,2,1)$ dengan k_d sebagai label maksimum.

Definisi 2: Pelabelan $L(d,2,1)$ yang injektif disebut pelabelan $L'(d,2,1)$. Span minimum atas semua pelabelan $L'(d,2,1)$ pada graf G, dinotasikan dengan $k_d'(G)$.

Pada bab ini akan dibahas pelabelan $L(d,2,1)$ pada komplemen dari graf lintasan $(\overline{P_n})$ dan komplemen dari graf siklus $(\overline{C_n})$ serta graf dua graf lintasan $2P_n$ $(K_1 \odot 2P_n)$ dikoronakan dengan K_1

Teorema 1. Jika H merupakan *spanning* subgraf terhubung dari G maka $k_d(H) \leq k_d(G)$.

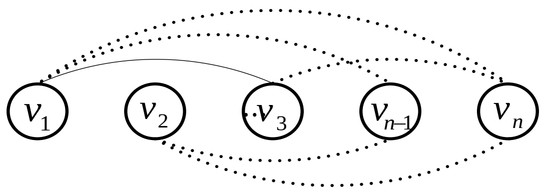
Bukti :

Misal G merupakan graf terhubung dengan order n dan H merupakan *spanning* subgraf terhubung dari G dengan $V(H) = V(G)$ dimana $V(H) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $V(G) = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$, $v_i \in H$ adalah titik yang bersesuaian dengan $u_i \in G$. Misalkan $k_d(G) = k$. Karena $k_d(G) = k$ maka G memiliki pelabelan $L(d,2,1)$ dengan span terkecil k. Sebut $f: V(G) \rightarrow \{1,2,\cdots,k\}$ ada. Karena H merupakan *spanning* subgraf terhubung dari G maka dapat diambil pelabelan $g = f$ sedemikian sehingga span dari g adalah k. Dengan demikian, $k_d(H) \leq k = k_d(G)$. Jadi, $k_d(H) \leq k_d(G)$.

Teorema di atas berlaku juga untuk $L(d,2,1)$ yang injektif, sehingga $k_d'(H) \leq k_d'(G)$.

3.1. Komplemen dari Graf Lintasan $(\overline{P_n})$

Sebelum itu akan diberikan notasi titik dari graf $\overline{P_n}$ untuk $n \geq 1$ adalah sebagai berikut :



Gambar 1 : Penotasian titik pada graf $\overline{P_n}$

Berdasarkan di atas dapat dinotasikan himpunan titik dan sisi pada graf $\overline{P_n}$ untuk $n \geq 4$, yaitu :

$$V(\overline{P_n}) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$$

$$E(\overline{P_n}) = \{v_i v_{i+j} | 1 \leq i \leq n-2, 2 \leq j \leq n-i\}$$

Teorema 2. Komplemen dari graf lintasan $(\overline{P_n})$, mempunyai

$$k_d'(\overline{P_n}) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d, & n = 5,7,9,\ldots \quad d \geq 4 \\ 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d, & n = 4,6,8,\ldots \quad d \geq 4 \end{cases}$$

Bukti :

Kasus 1 : n ganjil, $n \geq 5$

Pandang notasi titik untuk graf $\overline{P_n}$ pada Gambar 1 akan ditunjukkan $k_d'(\overline{P_n}) \leq 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$ yaitu dengan mengkontruksi pelabelan $L'(d,2,1)$ dari graf $\overline{P_n}$. Definisikan fungsi $f: V(\overline{P_n}) \rightarrow \left\{1,2,\cdots,1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d\right\}$ sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{i-1}{2}\right)d, & 1 \le i \le n,\ i \text{ ganjil} \\ 3 + \left(\frac{i-2}{2}\right)d, & 2 \le i \le n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

Dapat diverifikasi bahwa fungsi f memenuhi sifat pelabelan $L'(d,2,1)$ dalam Definisi 2 dengan label terbesar adalah $1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$, pada saat $f(v_1) = f(v_n)$. Jadi, $k_d^{'} \le 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $k_d^{'} \ge 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Misalkan v_i adalah titik dengan label 1 ($f(v_i) = 1$), titik v_i akan menginduksi lintasan dengan paling sedikit 4 himpunan titik. $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ akan membentuk $\overline{P}_4$ dengan 4 titik yaitu $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ dengan $i \ge 1$.

Jika, $f(v_1) = 1$ akibatnya $f(v_{i+1}) \ge 3$, $f(v_{i+2}) = d + 1$, $f(v_{i+3}) \ge d + 3$, sampai $f(v_n) \ge 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Dan jika, $f(v_n) = 1$ akibatnya $f(v_{n-1}) \ge 3$, $f(v_{n-2}) = d + 1$, $f(v_{n-3}) \ge d + 3$, sampai $f(v_1) \ge 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Sementara itu, untuk $f(v_i) = 1$ akibatnya $f(v_{i+1}) \ge 3$, $f(v_{i+2}) = d + 1$, $f(v_{i+3}) \ge d + 3$ sampai $f(v_{i-1}) \ge 3 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$, dimana $i = 2,3,\dots,n-1$ dan $d \ge 4$.

Kasus 2 : n genap $n \ge 4$

Pandang notasi titik untuk graf $\overline{P_n}$ pada Gambar 1 akan ditunjukkan $k_d{'}(\overline{P_n}) \le 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$ yaitu dengan mengkontruksi pelabelan $L^{'}(d,2,1)$ dari graf $\overline{P_n}$. Definisikan fungsi $f: V(\overline{P_n}) \to \left\{1,2,\cdots,1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d\right\}$ sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{i-1}{2}\right)d, & 1 \le i \le n,\ i \text{ ganjil} \\ 3 + \left(\frac{i-2}{2}\right)d, & 2 \le i \le n, i \text{ genap} \end{cases}$$

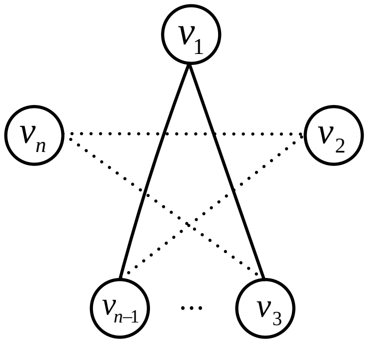
Dapat diverifikasi bahwa fungsi f memenuhi sifat pelabelan $L'(d,2,1)$ dalam Definisi 2 dengan label terbesar adalah $3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$ pada saat $i = n$. Jadi, $k_d^{'} \le 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $k_d^{'} \ge 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$. Misalkan v_i adalah titik dengan label 1 ($f(v_i) = 1$), titik v_i akan menginduksi lintasan dengan paling sedikit 4 titik. $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ akan membentuk $\overline{P}_4$ dengan 4 titik yaitu $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ dengan $i \ge 1$.

Jika, $f(v_i) = 1$ akibatnya $f(v_{i+1}) \ge 3$, $f(v_{i+2}) = d + 1$, $f(v_{i+3}) \ge d + 3$ sampai $f(v_n) \ge 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$. Dan jika, $f(v_n) = 1$ akibatnya $f(v_{n-1}) \ge 3$, $f(v_{n-2}) = d + 1$, $f(v_{n-3}) \ge d + 3$, sampai $f(v_1) \ge 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Sementara itu, untuk $f(v_i) = 1$ akibatnya $f(v_{i+1}) \ge 3$, $f(v_{i+2}) = d + 1$, $f(v_{i+3}) \ge d + 3$ sampai $f(v_{i-1}) \ge \left(\frac{n}{2}\right)d$ dimana $i = 2,3,\dots,n-1$ dan $d \ge 4$.

Dari beberapa kasus diatas, maka dapat disimpulkan bahwa $k_d{'}(\overline{P_n}) \ge 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$ untuk n ganjil dan $k_d{'}(\overline{P_n}) \ge 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d$ untuk n genap.

3.2. Komplemen dari Graf Siklus ($\overline{C_n}$)

Sebelum itu akan diberikan notasi titik dari graf $\overline{C_n}$ untuk $n \geq 1$ adalah sebagai berikut :



Gambar 2 : Penotasian titik pada graf $\overline{C_n}$

Berdasarkan di atas dapat dinotasikan himpunan titik dan sisi pada graf $\overline{C_n}$ untuk $n \geq 1$, yaitu:

$$V(\overline{C_n}) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$$

$$E(\overline{C_n}) = \{v_1 v_{1+j} |\ 2 \leq j \leq n-2\} \cup \{v_i v_{i+j} | 2 \leq i \leq n-2, 2 \leq j \leq n-i\}$$

Teorema 3. Komplemen dari graf siklus ($\overline{C_n}$), dengan $n \geq 5$ mempunyai

$$k_d^{'}(\overline{C_n}) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d, & n = 5,7, \ldots \quad d \geq 4 \\ 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right)d, & n = 6,8, \ldots \quad d \geq 4 \end{cases}$$

Bukti :

Kasus 1 : n ganjil, $n \geq 5$

Pandang notasi titik untuk graf $\overline{C_n}$ pada Gambar 2 akan ditunjukkan $k_d{}^{'}(\overline{C_n}) \leq 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$ yaitu dengan mengkontruksi pelabelan $L'(d,2,1)$ dari graf $\overline{C_n}$. Definisikan fungsi $f: V(\overline{C_n}) \to \{1,2,\cdots,1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{i-1}{2}\right)d, & i \quad \text{ganjil} \\ 3 + \left(\frac{i-2}{2}\right)d, & i \quad \text{genap} \end{cases}$$

Dapat diverifikasi bahwa fungsi f memenuhi sifat pelabelan $L'(d,2,1)$ dalam Definisi 2 dengan label terbesar adalah $1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Jadi, $k_d^{'} \leq 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $k_d^{'} \geq 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Misalkan v_i adalah titik dengan label 1 ($f(v_i) = 1$), titik v_i akan menginduksi lintasan dengan paling sedikit 5 himpunan titik. $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}\}$ akan membentuk $\overline{C_5} \cup \{v_i v_{i+4}\}$ hanya khusus untuk $n = 5$, dengan 5 titik yaitu $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}\}$ dengan $i \geq 1$.

Jika, $f(v_i)=1$ akibatnya $f(v_{i+1})\geq 3$, $f(v_{i+2})=d+1$, $f(v_{i+3})\geq d+3$, $f(v_{i+4})\geq 2d+1$, sampai $f(v_{i-1})\geq 1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d$ dimana $i=2,3,\dots,n$. Sementara itu, untuk $(f(v_1)=1)$ akibatnya $f(v_{i+1})\geq 3$, $f(v_{i+2})=d+1$, $f(v_{i+3})\geq d+3$, $f(v_{i+4})\geq 2d+1$, sampai $f(v_n)\geq 1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d$ dengan $d\geq 4$.

Kasus 1 : n genap $n\geq 6$

Pandang notasi titik untuk graf $\overline{C_n}$ pada Gambar 2 akan ditunjukkan $k_d{}'(\overline{C_n})\geq 3+\left(\frac{n-2}{2}\right)d$ yaitu dengan mengkontruksi pelabelan $L'(d,2,1)$ dari graf $\overline{C_n}$. Definisikan fungsi $f\colon V(\overline{C_n})\to\{1,2,\cdots,3+\left(\frac{n-2}{2}\right)d\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i)=\begin{cases}1+\left(\frac{i-1}{2}\right)d, & i \quad \text{ganjil}\\[2ex] 3+\left(\frac{i-2}{2}\right)d, & i \quad \text{genap}\end{cases}$$

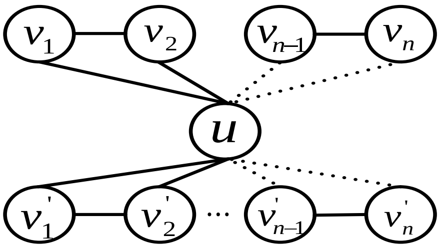
Dapat diverifikasi bahwa fungsi f memenuhi sifat pelabelan $L'(d,2,1)$ dalam Definisi 2 dengan label terbesar adalah $1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d$. Jadi, $k_d'\leq 3+\left(\frac{n-2}{2}\right)d$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $k_d'\geq 3+\left(\frac{n-2}{2}\right)d$. Misalkan v_i adalah titik dengan label 1 $(f(v_i)=1)$, titik v_i akan menginduksi lintasan dengan paling sedikit 5 himpunan titik. $\{v_i,v_{i+1},v_{i+2},v_{i+3},v_{i+4}\}$ akan membentuk $\overline{C_5}\cup\{v_iv_{i+4}\}$ hanya khusus untuk $n=5$, dengan 5 titik yaitu $\{v_i,v_{i+1},v_{i+2},v_{i+3},v_{i+4}\}$ dengan $i\geq 1$.

Jika, $f(v_i)=1$ akibatnya $f(v_{i+1})\geq 3$, $f(v_{i+2})=d+1$, $f(v_{i+3})\geq d+3$, $f(v_{i+4})\geq 2d+1$, sampai $f(v_{i-1})\geq 1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d$ dimana $i=2,3,\dots,n$. Sementara itu, untuk $(f(v_1)=1)$ akibatnya $f(v_{i+1})\geq 3$, $f(v_{i+2})=d+1$, $f(v_{i+3})\geq d+3$, $f(v_{i+4})\geq 2d+1$, sampai $f(v_n)\geq 3+\left(\frac{n-2}{2}\right)d$ dan $d\geq 4$.

Dengan demikian, dari beberapa kasus diatas, dapat disimpulkan bahwa $k_d'\geq 1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d$ untuk n ganjil dan $k_d{}'(\overline{C_n})\geq 3+\left(\frac{n-2}{2}\right)d$ untuk n genap.

3.3. K_1 Korona Dua Graf Lintasan ($K_1\odot 2P_n$)

Sebelum itu akan diberikan notasi titik secara umum pada K_1 korona dua graf lintasan ($K_1\odot 2P_n$) untuk $n\geq 5$ dan $d\geq 3$ dapat dilihat pada gambar :



Gambar 3 : Penotasian titik pada graf $K_1\odot 2P_n$

Berdasarkan di atas dapat dinotasikan himpunan titik dan sisi pada graf $K_1 \odot 2P_n$ untuk $n \geq 2$, yaitu:

$$V(K_1 \odot 2P_n) = \{u\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i^{'} | 1 \leq i \leq n\}$$
$$E(K_1 \odot 2P_n) = \{uv_i, | 1 \leq i \leq n\} \cup \{uv_i^{'}, | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i^{'} v_{i+1}^{'}, | 1 \leq i \leq n-1\}$$

Teorema 4. K_1 korona dua graf lintasan, $K_1 \odot 2P_n$, mempunyai $k_d^{'}(K_1 \odot 2P_n) = d + 4n - 1$, dimana $n \geq 5$, dan $d \geq 3$

Bukti :

Pandang notasi titik untuk graf $K_1 \odot 2P_n$ pada Gambar 3 akan ditunjukkan $k_d^{'}(K_1 \odot 2P_n) \leq d + 4n - 1$ yaitu dengan mengkonstruksi pelabelan $L^{'}(d, 2{,}1)$ dari graf $K_1 \odot 2P_n$. Definisikan fungsi injektif $f: V(K_1 \odot 2P_n) \rightarrow \{1, \cdots, d + 4n - 1\}$ sebagai berikut :

Untuk $n \geq 5$ dan $d \geq 3$, dimana n ganjil :

$f(u) = 1$

$$f(v_i) = \begin{cases} d + i, & 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ d + 2n + i + 1, & 2 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases} \qquad f(v_i^{'}) = \begin{cases} d + n + i + 1, & 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ d + 3n + i, & 2 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

Untuk $n \geq 5$ dan $d \geq 3$, dimana n genap :

$f(u) = 1$

$$f(v_i) = \begin{cases} d + i, & 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ d + 2n + i - 1, & 2 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases} \qquad f(v_i^{'}) = \begin{cases} d + n + i, & 1 \leq i \leq n,\ i \text{ ganjil} \\ d + 3n + i - 1, & 2 \leq i \leq n,\ i \text{ genap} \end{cases}$$

Dapat diverifikasi bahwa fungsi f memenuhi pelabelan $L'(d, 2{,}1)$ dalam Definisi 1 dan Definisi 2 dengan label terbesar adalah $d + 4n - 1$ pada saat $f(v_i^{'})$ dengan $i = 3n - 1$ untuk n ganjil dan pada titik $f(v_i^{'})$ dengan $i = n$ untuk n genap. Oleh karena itu, $k_d^{'}(K_1 \odot 2P_n) \leq d + 4n - 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $k_d^{'}(K_1 \odot 2P_n) \geq d + 4n - 1$. Pandang graf $K_{1,2n}$ adalah *spanning* subgraf terhubung dari $K_1 \odot 2P_n$ dan menurut Teorema 1, memberikan $k_d^{'}(K_1 \odot 2P_n) \geq k_d^{'}(K_{1,2n}) = d + 4n - 1$ sehingga $k_d^{'}(K_1 \odot 2P_n) \geq d + 4n - 1$ dimana $n \geq 5$. Jadi, $k_d^{'}(K_1 \odot 2P_n) = d + 4n - 1$.

IV. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari teorema tersebut adalah pertama komplemen dari graf lintasan $(\overline{P_n})$ adalah $L^{'}(d, 2{,}1)$ dengan $n \geq 4$ dan $d \geq 4$, $k_d^{'}(\overline{P_n}) = 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right) d$ dengan n ganjl atau $k_d^{'}(\overline{P_n}) = 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right) d$ dengan n genap, kedua komplemen dari graf siklus $(\overline{C_n})$ adalah $L^{'}(d, 2{,}1)$ dengan $n \geq 5$ dan $d \geq 4$, $k_d^{'}(\overline{C_n}) = 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right) d$ untuk n ganjil, atau $k_d^{'}(\overline{C_n}) = 3 + \left(\frac{n-2}{2}\right) d$ untuk n genap, ketiga K_1 korona dua graf lintasan, $K_1 \odot 2P_n$, mempunyai $k_d^{'}(K_1 \odot 2P_n) = d + 4n - 1$, dimana $n \geq 5$, dan $d \geq 3$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anwar, N., Haryanto, L., dan Nurdin, *Penentuan Nilai Tes Graf Korona $P_m \odot P_n$ Dengan Syarat Sisi-Sisi P_m Memiliki Bobot Terkecil,* Makassar, 2015, FMIPA Universitas Hasanuddin.

[2] Chia, M, L., Kuo, D., Liao, H, Y., Yang, C, H., Yeh, R, K., $L(3,2,1)$*-Labeling Of Graphs,* Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 15, 2011, No.6.

[3] Clipperton, J., $L(d,2,1)$ *Labeling of Simple Graphs*, Simpson College, 2008, IA.

[4] Fatimah, S., Sudarsana, I, W,. Musdalifah, S., *Pelabelan $L(2,1)$ pada Operasi Beberapa Kelas Graf,* Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan, Vol.13, 2016 No.2.

[5] Herlinawati, N., *Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Graf Kite, Graf Sun, dan Graf Wheel*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, 2012, Universitas Sebelas Maret.

[6] Indriati, D., Martini, T, S., Hernilawati, N., $L(d,2,1)$*-Labeling of Star and Sun Graphs*, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Science. Sebelas Maret University, Vol.2, 2012, No.11.