PENGGGUNAAN ALGORITMA GAUSS-NEWTON UNTUK MENENTUKAN SIFAT-SIFAT PENAKSIR PARAMETER β DAN σ^2 DALAM SUATU MODEL NON-LINIER

Nur'eni [1]

[1,]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako
Jl. Sukarno-Hatta Palu, Indonesia 94118

Abstrak

Model statistik non-linier merupakan model yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara variabel dan beberapa prosedur pendeteksian, sehingga model non-linier telah mengalami perkembangan yang sangat pesat terutama dalam hal teknik-teknik estimasi untuk menyelesaikan permasalahan, walaupun model-model non-liner secara umum lebih sulit dianalisa daripada model linier. Untuk mengetahui sifat-sifat dari penaksir parameternya maka digunakan algoritma Gauss-Newton dan OLS, sehingga model non-linier tersebut dapat ditransformasikan menjadi model linier yang disebut *linear pseudomodel* .

Kata Kunci: Non-Linier*,* Alogaritma Gauss- Newton, Ordinary Least Square, linear pseudomodel,

I. PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Model statistik non-linier sering muncul dalam kenyataan sehari-hari, misalnya dalam bentuk model-model ekonomi, seperti model *fungsi produksi Cobb-Douglas*, yakni

$$Q_t = \alpha\, L_t^{\beta_1} K_t^{\beta_2} + e_t$$

Dalam banyak kasus, model non-linier dapat ditrasformasikan ke dalam model linier. Sejauh ini, telah dikaji model-model yang linier. Dan dalam penelitian sekarang ini akan dikaji model statistik non-linier. Secara umum, model non-linier mempunyai bentuk **y = f(X,β) + e**.

Dengan pengetahuan tentang aljabar matriks dan algoritma Gauss-Newton, model non-linier tersebut dapat ditransformasikan menjadi model linier. Model linier yang diperoleh tersebut oleh Malinvaud dinamakan *linear pseudomodel.* Karena suatu model non-linier dapat diubah menjadi bentuk pseudomodel linier, maka untuk mencari penaksir parameternya dapat digunakan metode OLS yang sudah sering digunakan dalam model linier.

Dalam penelitian ini akan dikaji sifat-sifat penaksir parameter **β** dan σ^2 dalam suatu model non-linier. Juga akan ditentukan interval kepercayaan untuk penaksir parameter yang diperoleh dengan (tingkat ketelitian) *level of significant* tertentu.

I.2 Permasalahan

Permasalahan utama dalam penelitian ini adalah mencari penaksir parameter dan menyelidiki sifat-sifat penaksir tersebut pada suatu model non-linier.

I.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah :

1. Mentrasformasikan suatu model non-linier menjadi pseudomodel linier.

2. Mencari penaksir dan melihat sifat-sifatnya dari parameter yang tidak diketahui.
3. Menerapkan algoritma Gauss-Newton untuk mencari penaksir terbaik.
4. Mencari interval keperyaan dari penaksir parameter.
5. Membuat histogram distribusi empirik dari penaksir parameter.

II. LANDASAN TEORI

II.1. Nonlinear Least Squares Estimation of Parameter β

Pandang suatu model non-linier **y = f(X,β) + e**, dimana E(**e**) = **0** dan E(**ee'**) = $\sigma^2 I$. Mencari penaksir parameter β non-linier least square berarti meminimumkan *residual sum of squares*

$$S(\beta) = \mathbf{e}'\mathbf{e} = [\mathbf{y} - \mathbf{f}(X, \beta)]'[\mathbf{y} - \mathbf{f}(X, \beta)].$$

Dengan pengetahuan tentang matriks dan kalkulus, untuk meminimumkan S(β) sama artinya mencari turunan parsial pertamanya sama dengan vektor **0,** yakni

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2\frac{\partial f(X,\beta)'}{\partial \beta}[y - f(X,\beta)] = 0$$

Misalkan ditulis : Z(β) = $\frac{\partial f(X,\beta)'}{\partial \beta}$, maka diperoleh Z(β) = $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1,\beta)}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x_1,\beta)}{\partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_T,\beta)}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial f(x_T,\beta)}{\partial \beta_k} \end{bmatrix}$.

Maka *The first-order conditions* untuk minimum adalah Z(β)'[y – **f**(X, β)] = **0**.

Disini, untuk mencari penaksir parameter β digunakan algoritma Gauss-Newton. Untuk itu, aproksimasi **f(X, β)** dengan ekspansi Deret Taylor order satu disekitar titik awal β_1 . Aproksimasi untuk observasi ke-t adalah

$$f(x_t,\beta) \approx f(x_t,\beta_1) + \left[\left.\frac{f(x_t,\beta)}{\partial \beta_1}\right|_{\beta_1} \cdots \left.\frac{f(x_t,\beta)}{\partial \beta_k}\right|_{\beta_1} \right](\beta - \beta_1) .$$

Dengan demikian, untuk seluruh T observasi menghasilkan

$$f(X,\beta) \approx f(X,\beta_1) + Z(\beta_1)(\beta - \beta_1)$$

dan membentuk pseudomodel linier $\bar{y}(\beta_1) =$ **y** - $f(X,\beta_1) + Z(\beta_1)\beta_1$.

Dengan menggunakan metode OLS, dapat diperoleh penaksir parameter β untuk iterasi kedua, yakni $\beta_2 = [Z(\beta_1)'Z(\beta_1)]^{-1} Z(\beta_1)'\bar{y}(\beta_1)$

$= \beta_1 + [Z(\beta_1)'Z(\beta_1)]^{-1} Z(\beta_1)'[y - f(X,(\beta_1)]$.

Jika proses ini dilanjutkan sampai iterasi ke-n, algoritma Gauss-Newton memberikan

$$\beta_{n+1} = \beta_n + [Z(\beta_n)'Z(\beta_n)]^{-1} Z(\beta_n)'[y - f(X,(\beta_n)].$$

Jika proses konvergen $\beta_{n+1} = \beta_n$, maka *the first-order conditions* untuk minimum $Z(\beta_n)'[y - f(X,(\beta_n)] = 0$ harus dipenuhi.

II.2 Penaksir untuk Matriks Variansi-Kovariansi β Taksiran

Matriks variansi-kovariansi taksiran untuk penaksir parameter β adalah $\hat{\Sigma}_b = \hat{\sigma}^2 \; [Z(b)'Z(b)]^{-1}$

dimana $\hat{\sigma}^2 \frac{S(b)}{T-K}$.

III. PROSEDUR PENELITIAN

1. Memilih model non-linier tertentu yang akan ditaksir parameter yang tidak diketahui.
2. Mengubah model non-linier pada prosedur (1) menjadi pseudomodel linear.
3. Menerapkan algoritma (iterasi) Gauss-Newton dan metode OLS pada pseudomodel linear yang diperoleh untuk mencari penaksir terbaiknya.
4. Menyelidiki sifat-sifat penaksir yang diperoleh dan membandingkannya dengan nilai parameter yang sebenarnya.
5. Membuat interval taksiran untuk masing-masing penaksir parameter **β.**
6. Membuat program komputer dengan MATLAB™ untuk mengerjakan semua prosedur di atas .

IV. HASIL DAN ANALISIS PENELITIAN

IV.1. Menghitung Penaksir β Dan σ^2 Dengan Menggunakan Beberapa Jenis Initial Value

Dalan hal ini initial value yang digunakan adalah [1;1;1;1], [5.2;2.1;2.1;0.5], [4;1;3;1] , untuk 30 sampel dengan rumus yang digunakan :

y=5*ones(30,1)+2.*(L.^2+0.5*K)+normrnd(0,1,30,1)

serta matriks L dan K adalah sebagai berikut

	5.3893		0.802		0.228
	6.6099		0.249		0.258
	8.703		0.771		0.821
	4.5986		0.511		0.767
	9.1976		0.758		0.495
	7.2555		0.425		0.487
	7.4214		0.452		0.678
	6.1688		0.817		0.748
	6.6444		0.845		0.727
	5.5522		0.958		0.695
	4.2359		0.084		0.458
	6.0508		0.021		0.981
	5.8841		0.295		0.002
Y =	7.4877	K =	0.277	L =	0.429
	7.0007		0.546		0.231
	5.5195		0.129		0.664
	3.6358		0.017		0.631
	6.15		0.906		0.059
	5.803		0.223		0.811

4.5147		0.145		0.758
5.614		0.161		0.05
6.9419		0.006		0.823
7.1592		0.836		0.483
6.185		0.521		0.682
5.5394		0.93		0.116
5.6764		0.495		0.44
5.4265		0.185		0.456
5.5435		0.092		0.342
7.4256		0.485		0.358
6.1060		0.934		0.162

Tabel 1: Taksiran parameter β dengan initial value [1; 1; 1; 1]

Iterasi	Parameter			
	β_0	β_1	β_2	β_3
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	4.5451	1.7550	2.3635	0.2514
3	4.8855	1.9846	1.9120	0.5358
4	4.6103	1.9989	1.9986	0.5000

Tabel 2: Taksiran parameter β dengan initial value [5.2; 2.1; 2.1; 0.5]

Iterasi	Parameter			
	β_0	β_1	β_2	β_3
1	5.2000	2.1000	2.1000	0.5000
2	4.1563	1.9987	2.0023	0.5003
3	3.2622	2.0000	2.0000	0.5000
4	4.5505	2.0000	2.0000	0.5000

Tabel 3: Taksiran parameter β dengan initial value [4; 1; 3; 1]

Iterasi	Parameter			
	β_0	β_1	β_2	β_3
1	4.0000	1.0000	3.0000	1.0000
2	3.4932	1.9140	0.5721	0.0718
3	5.3433	1.2288	1.3470	0.5636
4	5.9446	1.9167	2.2009	0.4973
5	7.3719	1.9949	1.9805	0.5011
6	5.5198	1.9999	1.9999	0.5000

Analisa tabel:

Dari tabel di atas terlihat bahwa penaksir β konvergen tidak pada jumlah iterasi yang sama. Untuk nilai awal [1;1;1;1] dan [5.2;2.1;2.1;0.5], konvergen pada iterasi ke-4 dengan Residual Sum of Square adalah 4.1265e-006 dan 6.8523e-024. Sementara dengan menggunaka nilai awal [4;1;3;1], konvergen pada iterasi ke-6, dengan menggunakan presisi 10^{-9}. Dari tabel-tabel di atas, penaksir β_0 merupakan penaksir kurang efisien karena β_0 adalah intercept dalam model non-linier yang kita punya. Residual Sum of square untuk initial value yang digunakan adalah1.1239e-008. Untuk kasus initial value [4;1;3;1], matrik variansi kovariansi dari penaksir β adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Sigma}_b = 1.0e\text{-}008^* \begin{vmatrix} 0.0123 & -0.0050 & 0.0225 & -0.0028 \\ -0.0050 & 0.0274 & 0.0224 & -0.0048 \\ 0.0225 & 0.0224 & 0.1201 & -0.0054 \\ -0.0028 & -0.0048 & -0.0054 & 0.0044 \end{vmatrix}$$

IV.2. Interval Confidence Untuk Penaksir Parameter β_0, β_1, β_2, β_3 Dengan Significance Level α = 5%

Tabel 4: Interval Confidence untuk Significance level α = 5%

Parameter	Interval Confidence untuk nilai awal					
	[1,1,1,1]		[5.2;2.1;2.1;0.5]		[4;1;3;1]	
β_0	[4.6100	4.6102]	[4.5503	4.5507]	[5.5190	5.5298]
β_1	[1.9981	1.9996]	[1.9991	2.0009]	[1.9989	2.0081]
β_2	[1.9881	1.9996]	[1.9991	2.0009]	[1.9989	2.0081]
β_3	[0.4901	0.5010]	[0.4993	0.5007]	[0.4991	0.5009]

Analisa Tabel 4

Dari tabel 4 terlihat bahwa, interval taksiran untuk nilai awal [5.2;2.1;2.1;0.5] memberikan taksiran yang paling efisien diantara interval dengan nilai-nilai awal yang lain.

IV.3. Menghitung Non-Linear Least Square Estimates Yang Memenuhi Kasus Sebagai Berikut

- **$\beta_1 = \beta_2$**

Tabel 5: Taksiran parameter β dengan initial value [4;3;1]

Iterasi	Parameter			
	β_0	$\beta_1 = \beta_2$	β_2	β_3
1	4.0000	3.0000	3.0000	1.0000
2	5.1082	2.9796	2.9796	0.4273
3	5.0214	0.4105	0.4105	0.6114
4	6.0047	0.6084	0.6084	-0.9464
5	5.1253	1.6931	1.6931	2.8120
6	5.3050	1.8408	1.8408	0.4825
7	5.3683	1.5753	1.5753	0.5853
8	5.2252	1.7680	1.7680	0.4487

Analisa tabel 5:

Dari tabel 5 di atas terlihat bahwa penaksir β konvergen pada iterasi ke-8 dengan Residual Sum of Square adalah 29.2084 dengan menggunakan presisi 10^{-9}. Nilai penaksir β_1 dalam hal ini adalah nilai penaksir untuk parameter β_2.

IV.4. Menghitung Non-Linear Least Square Estimates Yang Memenuhi Kasus Sebagai Berikut

- $\beta_1 = 1/\beta_3$

Tabel 6: Taksiran parameter β dengan initial value [4;3;1]

Iterasi	Parameter			
	β_0	$\beta_1=1/\beta_3$	β_2	β_3
1	4.0000	1.0000	3.0000	1.0000
2	4.7866	12.3609	0.5790	0.0809
3	5.2187	6.5104	0.6979	0.1536
4	6.1918	3.6643	0.9228	0.2729
5	4.5067	2.3838	1.3058	0.4195

Analisa Tabel 6:

Dari tabel 6 di atas terlihat bahwa penaksir β konvergen pada iterasi ke-5 dengan Residual Sum of Square adalah 9.2285 dengan menggunakan presisi 10^{-9}.

IV.5. Menghitung non-linear least square estimates yang memenuhi kasus sebagai berikut

- $\beta_1 = \beta_2$ dan $\beta_1 = 1/\beta_3$

Tabel 7: Taksiran parameter β dengan initial value [4;3;1]

Iterasi	Parameter			
	β_0	$\beta_1=1/\beta_3$	$\beta_2=1/\beta_3$	β_3
1	4.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	6.4054	1.6664	1.6664	0.6001
3	4.9977	1.8420	1.8420	0.5429

Analisa Tabel 7:

Dari tabel 7 di atas terlihat bahwa penaksir β konvergen pada iterasi ke-3 dengan Residual Sum of Square adalah 0.0702 dengan menggunakan presisi 10^{-9}. Secara umum mengakibatkan penaksir β_1 dan β_2 cukup efisien.

IV.6. Selanjutnya Akan Dihitung Rata-Rata Nilai Penaksir β dan σ^2 untuk 100 Sampel dan Dibandingkan Dengan Nilai Sebenarnya Yaitu β = [5;2;2;0.5] dan σ^2 = 1.

Untuk beberapa initial value yang dicoba, diperoleh hasil taksiran seperti pada tabel berikut

Tabel 8: Taksiran Parameter β Dan σ^2 Untuk 100 Sampel (Dengan Beberapa Initial Value)

No	Initial value	Rata Iterasi konvergen	β_0	β_1	β_2	β_3	σ^2
1	[1,1,1,1]	2.6600	5.8256	1.8560	2.1833	0.3679	0.0579
2	[5.2;2.1;2.1;0.5]	5.0400	4.9526	1.9997	2.0005	0.5001	3.429e-12
3	[4;3;3;1]	3.7900	5.8757	1.9752	2.0454	0.5491	3.034e-04

Analisa tabel 8:

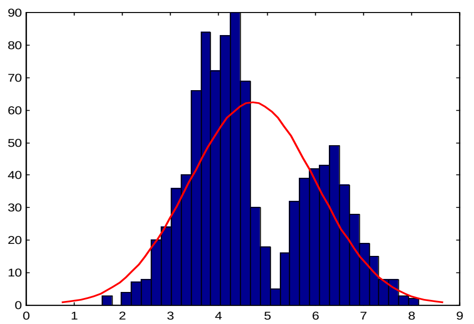
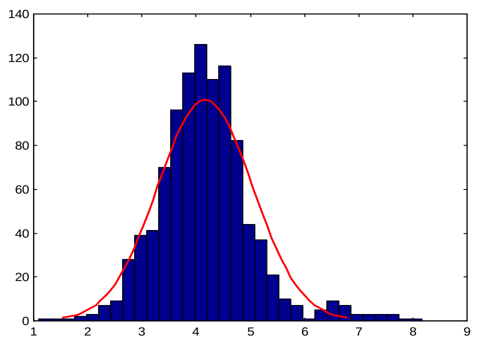
Dari tabel 8 di atas dapat dilihat bahwa, untuk replikasi 100, yang artinya mendapatkan 100 buah penaksir yang konvergen, penaksir β_0 tetap kurang efisien. Selain itu dapat dilihat pula bahwa, untuk initial value yang jauh dengan nilai sebenarnya memberikan nilai taksiran yang kurang efisien.

IV.7 Grafik Batang Untuk Setiap Nilai Penaksir Parameter β_0, β_1, β_2, β_3 Dan σ^2 Untuk 100 Sampel.

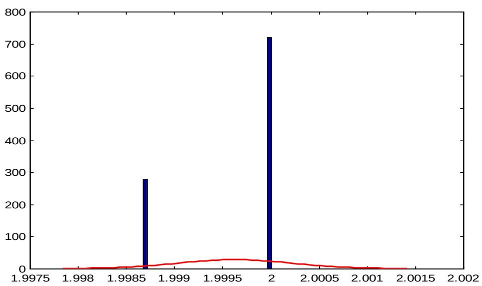
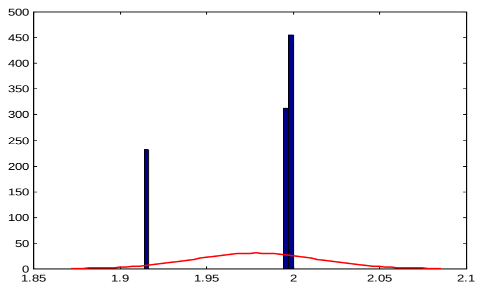
Dalam hal ini initial value yang diambil adalah disekitar nilai β dan σ^2 yaitu [5.2;2.1;2.1;0.5] dan [6;3;3;1]

Tabel 9 : Distribusi Empirik untuk Penaksir β dan σ^2 dengan dua initial value

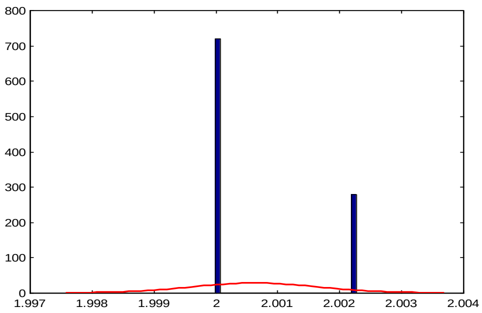
INITIAL VALUE

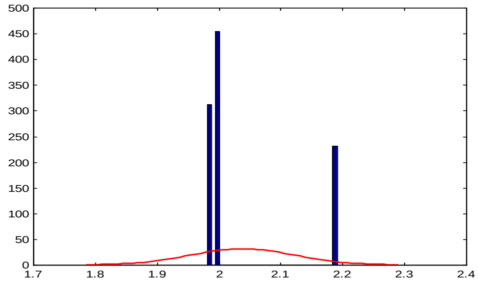
[5.2;2.1;2.1;0.5]	[6;3;3;1]
	

Distribusi empirik untuk β_0 taksiran

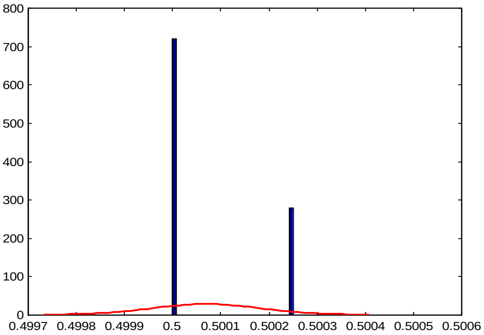
[5.2;2.1;2.1;0.5]	[6;3;3;1]
	

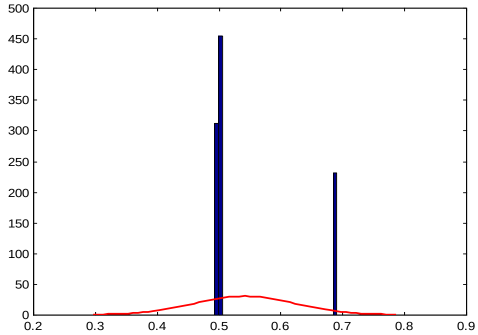
Distribusi empirik untuk β_1 taksiran



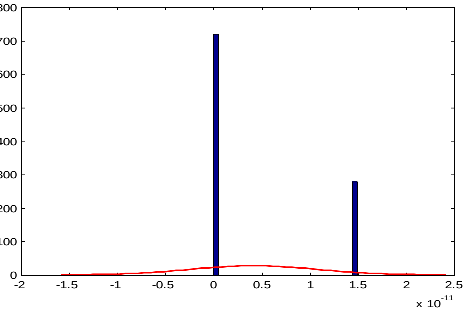


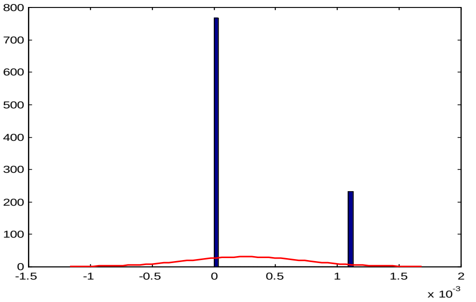
Distribusi empirik untuk β_2 taksiran





Distribusi empirik untuk β_3 taksiran





Distribusi empirik untuk σ^2 taksiran

Dari tabel 9 diatas, dapat dilihat bahwa, untuk penaksir β_0 nilai taksirannya sangat bervariasi. Ini disebabkan karena taksiran β_0 tidak konvergen ke nilai yang sebenarnya. Sementara itu, untuk penaksir β_1, β_2, dan β_3 , serta σ^2 nilai taksirannya efisien dan konvergen ke nilai sebenarnya, sehingga diperoleh diagram seperti terlihat di tabel di atas, dimana nilai-nilai taksirannya menumpuk di nilai sebenarnya.

V. KESIMPULAN

1. Penaksir β_0 kurang efisien, karena β_0 merupakan intercept (aditif) dalam model nonlinier yang digunakan.

2. Secara umum, jika initial value lebih dekat dengan nilai sebenarnya, jumlah iterasi untuk konvergen semakin sedikit.
3. Untuk model nonlinier dengan substitusi parameter- parameternya maka penaksirnya tidak berubah secara significant. Dalam kasus seperti ini, penaksir β_0 tetap kurang efisien, karena selalu muncul sebagai intercept dalam model.
4. Untuk penaksir β_1, β_2, dan β_3 , serta σ^2 nilai taksirannya konvergen ke nilai sebenarnya, sehingga diperoleh diagram seperti di atas, dimana nilai-nilai taksirannya menumpuk di nilai sebenarnya.

VI. REFERENSI

[1] Draper N. R. and Smith H., 1998, *Applied Regression Analysis*, third edition. John Wiley & Sons, New York.

[2] Duane H., Bruce L ., 1998, *Mastering Matlab 5: A Comprehensive Tutorial and Reference*, Prentice Hall, New Jersey.

[3] Judge, G.G., et.al., 1988, *Introduction To The Theory And Practice of Econometrics*, second edition, John Wiley & Sons, New York.

[4] Muirhead, R.J., 1982, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley & Sons, New York.