

PELABELAN SELIMUT AJAIB SUPER PADA GRAF LINTASAN

N. Farida¹, I W. Sudarsana², dan Resnawati³

^{1,2,3} Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako

Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia.

¹nurulfarida12047@gmail.com, ²sudarsanaiwayan@yahoo.co.id, ³r35n4w4t1@yahoo.com

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. An edge covering of G is a family of subgraphs H_1, \dots, H_k such that each edge of $E(G)$ belongs to at least one of the subgraphs H_i , $1 \leq i \leq k$. If every H_i is isomorphic to a given graph H , then the graph G admits an H -covering. Let G be a containing a covering H , and f the bijektiv function $f: (V \cup E) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V| + |E|\}$ is said an H -magic labeling of G if for every subgraph $H' = (V', E')$ of G isomorphic to H , is obtained that $\sum_{v \in V(H')} f(v) + \sum_{e \in E(H')} f(e)$ is constant. G is said to be H -super magic if $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, |V|\}$. In this case, the graph G which can be labeled with H -magic is called the covering graph H -magic. The sum of all vertex labels and all edge labels on the covering H -super magic then obtained constant magic is denoted by $\sum f(H)$. The duplication graph 2 of graph $D_2(G)$ is a graph obtained from two copies of graph G , called G and G' , with connecting each respectively vertex v in G with the vertices immediate neighboring of v' in G' . The purpose of this study is to obtain a covering super magic labeling for of $D_2(P_m)$ on $(D_2(P_n))$ for $n \geq 4$ and $3 \leq m \leq n - 1$. In this paper, we have showed that duplication path graph $(D_2(P_n))$ has $D_2(P_m)$ covering super magic labeling for $n \geq 4$ and $3 \leq m \leq n - 1$ with constant magic for all covering is $\sum f(D_2(P_m)^{(s)}) = \sum f(D_2(P_m)^{(s+1)})$.

Keywords : **Covering H -Magic, Covering H -Super Magic, Duplication Path Graph.**

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana. Sebuah selimut sisi dari suatu graf G adalah keluarga dari subgraf-subgraf H_1, \dots, H_k sedemikian sehingga sebarang sisi dari graf $E(G)$ berada dalam paling sedikit satu dari subgraf-subgraf H_i , $1 \leq i \leq k$. Jika setiap H_i isomorfik dengan graf H yang diberikan, maka dikatakan bahwa G memuat sebuah selimut H . Graf G memuat sebuah selimut H dan f sebuah fungsi bijektiv $f: (V \cup E) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V| + |E|\}$ disebut pelabelan ajaib H dari suatu graf G jika untuk setiap subgraf $H' = (V', E')$ dari G isomorfik terhadap H , sehingga diperoleh $\sum_{v \in V(H')} f(v) + \sum_{e \in E(H')} f(e)$ adalah konstanta. Dikatakan bahwa graf G memiliki H selimut ajaib super jika $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, |V|\}$. Dalam hal ini, graf G yang dapat dilabeli dengan H -ajaib disebut graf selimut H -ajaib. Jumlah dari banyaknya titik dan banyaknya sisi memuat sebuah selimut H ajaib super maka diperoleh konstanta ajaibnya yang di notasikan dengan $\sum f(H)$. Graf duplikasi sebanyak 2 dari graf $D_2(G)$ adalah graf yang diperoleh dari 2 rangkap graf G , sebut G dan G' , dengan menghubungkan masing-masing titik v di G dengan titik-titik tetangga langsung dari v' di G' . Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan formula pelabelan selimut ajaib super berbentuk $D_2(P_m)$ pada duplikasi dari graf lintasan $D_2(P_n)$ dan hasil penelitian menunjukkan bahwa duplikasi dari graf lintasan $(D_2(P_n))$ memiliki pelabelan selimut ajaib super berbentuk $D_2(P_m)$ untuk $n \geq 4$ dan $3 \leq m \leq n - 1$ dengan konstanta ajaib untuk semua selimut adalah $\sum f(D_2(P_m)^{(s)}) = \sum f(D_2(P_m)^{(s+1)})$.

Kata kunci : **Selimut H -Ajaib, Selimut H -Ajaib Super, Duplikasi Graf Lintasan.**

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf yang diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 sebagai upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg. Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler mempresentasikan daratan yang dihubungkan jembatan dengan titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan sisi (*edge*) (Cunningham, 2004). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, penyimpanan data komputer, ilmu kimia, sosiologi, dekomposisi graf dan kriptograf. Bahkan pelabelan graf dapat di aplikasikan dalam ilmu kesehatan dan navigasi yaitu kristal ografi sinar-x, teori koding, radar navigasi geografis, pemancar frekuensi radio, desain sirkuit gabungan pada komponen elektronik dan riset operasi (Baskoro, 2007).

Terdapat beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan grafceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super (Gallian, 2016). Pelabelan ajaib kemudian dikembangkan oleh Kotzig dan Rosa (1970) sebagai total titik ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan total sisi ajaib super.

Pelabelan total ajaib kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutierrez dan Lladó (2005) yang membuktikan bahwa graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dapat diselimuti dengan selimut bintang ajaib $K_{1,n}$. Kemudian Lladó dan Moragas (2007) mengembangkan penelitian untuk selimut *cycle* ajaib dan telah membuktikan bahwa graf roda (*wheel graph*) W_n dengan $n \geq 5$ dan n ganjil adalah C_3 -ajaib super. Selanjutnya, Maryati dkk (2008) meneliti selimut lintasan ajaib dan Ngurah (2008) meneliti tentang selimut-*cycle* ajaib pada beberapa jenis graf.

Hingga kini terdapat beberapa hasil penelitian terkait pelabelan selimut ajaib super yaitu Selvagopal dan Jayanthi (2008) membuktikan untuk setiap bilangan bulat positif n , sebuah k – polygonal lintasan dengan panjang n memiliki C_k – ajaib super. Ngurah dkk. (2010) membangun pelabelan selimut ajaib super untuk beberapa graf kipas dan tangga. Jayanthi et al. (2012) membuktikan bahwa graf berikut memiliki C_3 –ajaib super: anti prisma, kipas, dan graf-graf yang diperoleh dari ladder $P_2 \bar{\vee} P_n$ dengan dua lintasan $v_{1,1}, \dots, v_{1,n}$ dan $v_{2,1}, \dots, v_{2,n}$ dengan menambahkan sisi $v_{1,j}v_{2,j+1}$. Roswitha et al. (2013) membuktikan bahwa graf Jahangir diperumum ($J_{k,s}$) memiliki C_{s+2} –ajaib super, $K_{2,n}$ memiliki C_4 –ajaib super dan W_n untuk n genap dan $n \geq 4$ memiliki C_3 –ajaib super. Jayanthi dan Muthuraja (2014) membuktikan $P_{m,n}$ memiliki C_{2m} –ajaib super untuk setiap $m, n \geq 2$. Maryanti et al. (2015)

membuktikan beberapa pelabelan P_n –ajaib super dari siklus dengan beberapa sisi liontin dan sub divisinya.

Penelitian tentang pelabelan selimut ajaib super untuk duplikasi dari suatu graf belum pernah dilakukan. Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk mengkaji tentang pelabelan selimut ajaib super pada duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$.

1.2. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan formula pelabelan selimut ajaib super berbentuk $D_2(P_m)$ pada duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$.

1.3. Batasan Masalah

Pada Penelitian ini, observasi akan dilakukan pada duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ untuk $n \geq 4$.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pelabelan Selimut Ajaib Super

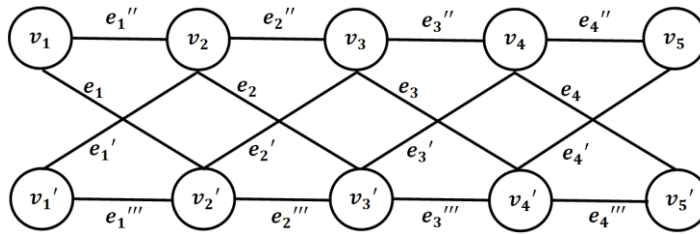
Sebuah selimut sisi dari graf G adalah keluarga dari subgraf-subgraf yang berbeda H_1, \dots, H_k sedemikian sehingga sebarang sisi dari graf G berada dalam paling sedikit satu dari subgraf-subgraf H_i , $1 \leq i \leq k$. Dengan demikian dikatakan bahwa graf G memuat sebuah selimut sisi H_1, \dots, H_k . Jika setiap H_i isomorfik dengan suatu graf tertentu yang diberikan, maka dikatakan bahwa graf G memuat sebuah selimut H yang di notasikan dengan H selimut graf G (Gutiérrez dan Lladó, 2005).

Definisi 1 : Misalkan $G = (V(G), E(G))$ memuat sebuah selimut H dan f sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ disebut pelabelan ajaib H dari suatu graf G jika untuk setiap subgraf $H' = (V', E')$ dari G isomorfik terhadap H , sehingga diperoleh $\sum_{v \in V(H')} f(v) + \sum_{e \in E(H')} f(e)$ adalah konstanta. Dikatakan bahwa graf G memiliki H selimut ajaib super jika $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$. Dalam hal ini, graf G yang dapat dilabeli dengan H –ajaib disebut graf selimut H – ajaib. Jumlah dari banyaknya titik dan banyaknya sisi yang memuat sebuah selimut H ajaib super maka diperoleh konstanta ajaibnya yang di notasikan dengan $\sum f(H)$ (Gallian, 2016).

2.2. Duplikasi Graf Lintasan

Duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ adalah graf yang diperoleh dari 2 rangkap graf lintasan(P), sebut P dan P' , dengan menghubungkan masing-masing titik v di P dengan titik-titik tetangga langsung dari v' di P' dan n menyatakan banyak titik pada graf lintasan. (Vaidya

dan Shah, 2011). Contoh duplikasi sebanyak 2 dari graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1 : Contoh Graf $D_2(P_5)$

III. METODE PENELITIAN

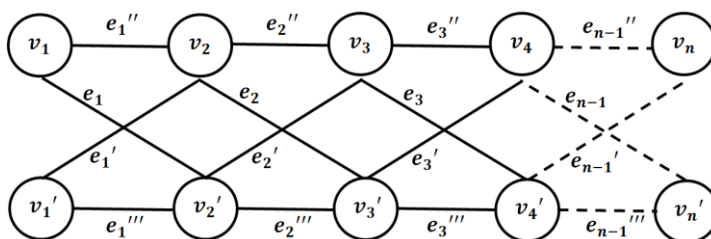
Penelitian ini dilakukan sesuai dengan prosedur sebagai berikut.

1. Memulai penelitian.
2. Mengkaji literatur.
3. Menotasikan titik dan sisi pada duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ untuk $n \geq 4$.
4. Memberikan label titik dan sisi pada duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ untuk $n \geq 4$.
5. Membuat formula untuk pelabelan selimut ajaib super pada duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ untuk $n \geq 4$.
6. Hasil.
7. Kesimpulan.
8. Selesai.

IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1. Pelabelan Selimut Ajaib Super pada Duplikasi Graf Lintasan

Pada sub bab ini akan ditunjukkan bahwa hasil secara umum pada duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ disajikan seperti dalam teorema 1. Penotasian titik dan sisi pada duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ seperti Gambar 2.



Gambar 2 : Penotasian Himpunan Titik dan Sisi pada Graf $D_2(P_n)$

Berdasarkan Gambar 1 dapat dinotasikan graf $D_2(P_n)$ memiliki himpunan titik dan sisi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(D_2(P_n)) &= \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v'_i | 1 \leq i \leq n\} \\ E(D_2(P_n)) &= \{e_i = v_i v'_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e'_i = v_{i+1} v'_i | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\ &\quad \{e''_i = v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e'''_i = v'_i v'_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}. \end{aligned}$$

dan diperoleh banyaknya titik graf $D_2(P_n)$ adalah $2n$ sedangkan banyaknya sisi pada graf $D_2(P_n)$ adalah $2(2n-2)$. Dengan demikian, jumlah banyaknya titik dan sisi $2(3n-2)$.

Teorema 1. Graf $D_2(P_n)$ memiliki pelabelan selimut ajaib super berbentuk $D_2(P_m)$ untuk $n \geq 4$ dan $3 \leq m \leq n-1$.

Bukti:

Memberi label pada setiap titik dan sisi duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ dengan cara sebagai berikut.

Pelabelan titik untuk $f(v_i)$: (1)

Kasus 1: $n \equiv 0 \pmod{m}$

- Label $v_1, v_{m+1}, v_{2m+1}, v_{3m+1}, \dots, v_{n-m+1}$ dengan masing-masing $1, 2, 3, 4, \dots, \frac{n}{m}$.
- Untuk $1 \leq k \leq m-1$, label $v_{1+k}, v_{m+1+k}, v_{2m+1+k}, v_{3m+1+k}, \dots, v_{n-m+1+k}$ dengan masing-masing $k \left(\frac{n}{m}\right) + 1, k \left(\frac{n}{m}\right) + 2, k \left(\frac{n}{m}\right) + 3, k \left(\frac{n}{m}\right) + 4, \dots, (k+1) \left(\frac{n}{m}\right)$.

Kasus 2: $n \equiv 1 \pmod{m}$

- Label $v_1, v_{m+1}, v_{2m+1}, v_{3m+1}, \dots, v_{n-m}, v_n$ dengan masing-masing $1, 2, 3, 4, \dots, \left(\frac{n-1}{m}\right), \left(\frac{n-1}{m}\right) + 1$.
- Untuk $1 \leq k \leq m-1$, label $v_{1+k}, v_{m+1+k}, v_{2m+1+k}, v_{3m+1+k}, \dots, v_{n-m+k}$ dengan masing-masing $k \left(\frac{n-1}{m}\right) + 2, k \left(\frac{n-1}{m}\right) + 3, k \left(\frac{n-1}{m}\right) + 4, k \left(\frac{n-1}{m}\right) + 5, \dots, (k+1) \left(\frac{n-1}{m}\right) + 1$.

Kasus 3: $n \equiv t \pmod{m}$, dimana $t = 2, 3, 4, \dots, m-1$

- Label $v_1, v_{m+1}, v_{2m+1}, v_{3m+1}, \dots, v_{n-t+1}$ dengan masing-masing $1, 2, 3, 4, \dots, \left(\frac{n-t}{m}\right) + 1$.
- Label $v_{n-t+2}, v_{n-t+3}, v_{n-t+4}, \dots, v_n$ dengan masing - masing $2 \left(\frac{n-t}{m} + 1\right), 3 \left(\frac{n-t}{m} + 1\right), 4 \left(\frac{n-t}{m} + 1\right), \dots, t \left(\frac{n-t}{m} + 1\right)$.
- Untuk $1 \leq k \leq t$, label $v_{1+k}, v_{m+1+k}, v_{2m+1+k}, v_{3m+1+k}, \dots, v_{n-m-t+1+k}$ dengan masing-masing $k \left(\frac{n-t}{m} + 1\right) + 1, k \left(\frac{n-t}{m} + 1\right) + 2, k \left(\frac{n-t}{m} + 1\right) + 3, k \left(\frac{n-t}{m} + 1\right) + 4, \dots, k \left(\frac{n-t}{m} + 1\right) + \frac{n-t}{m}$.
- Untuk $t+1 \leq k \leq m-1$, label $v_{1+k}, v_{m+1+k}, v_{2m+1+k}, v_{3m+1+k}, \dots, v_{n-m-t+1+k}$ dengan masing-masing $k \left(\frac{n-t}{m}\right) + t + 1, k \left(\frac{n-t}{m}\right) + t + 2, k \left(\frac{n-t}{m}\right) + t + 3, k \left(\frac{n-t}{m}\right) + t + 4, \dots, (k+1) \left(\frac{n-t}{m}\right) + t$.

Pelabelan titik untuk $f(\hat{v}_i)$ dengan $n +$ (Pelabelan titik pada $f(v_i)$) (2)

Selanjutnya, Pelabelan pada sisi $f(e_i)$: (3)

Misal e_i , $1 \leq i \leq n - 1$, dan misalkan $q = n - 1$.

Kasus 1: $q \equiv 0 \pmod{m - 1}$

- Label $e_1, e_m, e_{2m-1}, e_{3m-2}, e_{4m-3}, \dots, e_{n-m+1}$ dengan masing-masing $3n - 1, 3n - 2, 3n - 3, 3n - 4, \dots, 3n - \left(\frac{q}{m-1}\right)$.
- Untuk $1 \leq k \leq m - 2$, Label $e_{1+k}, e_{m+k}, e_{2m+k-1}, e_{3m+k-2}, e_{4m+k-3}, \dots, e_{n-m+k+1}$ dengan masing-masing $3n - k\left(\frac{q}{m-1}\right) - 1, 3n - k\left(\frac{q}{m-1}\right) - 2, 3n - k\left(\frac{q}{m-1}\right) - 3, 3n - k\left(\frac{q}{m-1}\right) - 4, \dots, 3n - (k + 1)\left(\frac{q}{m-1}\right)$.

Kasus 2: $q \equiv 1 \pmod{m - 1}$

- Label $e_1, e_m, e_{2m-1}, e_{3m-2}, e_{4m-3}, \dots, e_q$ dengan masing-masing $2n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right), 2n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 1, 2n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 2, 2n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 3, 2n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 4, \dots, 2n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - \left(\frac{q-1}{m-1}\right)$.
- Untuk $1 \leq k \leq m - 2$, label $e_{1+k}, e_{m+k}, e_{2m+k-1}, e_{3m+k-2}, e_{4m+k-3}, \dots, e_{n-m+k}$ dengan masing-masing $3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 2, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 3, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 4, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 5, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 6, \dots, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - (k + 1)\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 1$.

Kasus 3: $q \equiv t \pmod{m - 1}$, dimana $t = 2, 3, 4, \dots, m - 2$

- Label $e_1, e_m, e_{2m-1}, e_{3m-2}, e_{4m-3}, \dots, e_{q-t+1}$ dengan masing-masing $2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right), 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 1, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 2, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 3, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 4, \dots, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - \left(\frac{q-t}{m-1}\right)$.
- Label $e_{q-t+2}, e_{q-t+3}, e_{q-t+4}, \dots, e_q$ dengan masing-masing $2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 2\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 1, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 3\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 2, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 4\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 3, \dots, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - t\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - (t - 1)$.
- Untuk $1 \leq k \leq t - 1$, label $e_{1+k}, e_{m+k}, e_{2m+k-1}, e_{3m+k-2}, e_{4m+k-3}, \dots, e_{n-m-t+k+1}$ dengan masing-masing $2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right), 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 1, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 2, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 3, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 4, \dots, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - \left(\frac{q-t}{m-1} - 1\right)$.
- Untuk $t \leq k \leq m - 2$, label $e_{1+k}, e_{m+k}, e_{2m+k-1}, e_{3m+k-2}, e_{4m+k-3}, \dots, e_{n-m-t+k+1}$ dengan masing-masing $2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m - k - 1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right), 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m - k - 1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 1, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m - k - 1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 2, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m - k - 1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 3, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m - k - 1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 4, \dots, 2n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m - k - 1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - \left(\frac{q-t}{m-1} - 1\right)$.

Pelabelan pada sisi $f(e_i)$: (4)

Misal e'_i , $1 \leq i \leq n-1$, dan misalkan $q = n-1$.

Kasus 1: $q \equiv 0 \pmod{m-1}$

- a. Label $e'_1, e'_m, e'_{2m-1}, e'_{3m-2}, e'_{4m-3}, \dots, e'_{n-m+1}$ dengan masing-masing $4n-2, 4n-3, 4n-4, 3n-5, \dots, 4n - \left(\frac{q}{m-1}\right) - 1$.
- b. Untuk $1 \leq k \leq m-2$, Label $e'_{1+k}, e'_{m+k}, e'_{2m+k-1}, e'_{3m+k-2}, e'_{4m+k-3}, \dots, e'_{n-m+k+1}$ dengan masing-masing $4n - k\left(\frac{q}{m-1}\right) - 2, 4n - k\left(\frac{q}{m-1}\right) - 3, 4n - k\left(\frac{q}{m-1}\right) - 4, 4n - k\left(\frac{q}{m-1}\right) - 5, \dots, 4n - (k+1)\left(\frac{q}{m-1}\right) - 1$.

Kasus 2: $q \equiv 1 \pmod{m-1}$

- a. Label $e'_1, e'_m, e'_{2m-1}, e'_{3m-2}, e'_{4m-3}, \dots, e'_q$ dengan masing-masing $3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 1, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 2, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 3, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 4, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - 5, \dots, 3n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - \left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 1$.
- b. Untuk $1 \leq k \leq m-2$, label $e'_{1+k}, e'_{m+k}, e'_{2m+k-1}, e'_{3m+k-2}, e'_{4m+k-3}, \dots, e'_{n-m+k}$ dengan masing-masing $4n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 3, 4n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 4, 4n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 5, 4n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 6, 4n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 7, \dots, 4n + \left(\frac{n+m-3}{m-1}\right) - (k+1)\left(\frac{q-1}{m-1}\right) - 2$.

Kasus 3: $q \equiv t \pmod{m-1}$, dimana $t = 2, 3, 4, \dots, m-2$

- a. Label $e'_1, e'_m, e'_{2m-1}, e'_{3m-2}, e'_{4m-3}, \dots, e'_{q-t+1}$ dengan masing-masing $3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 1, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 2, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 3, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 4, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 5, \dots, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - \left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 1$.
- b. Label $e'_{q-t+2}, e'_{q-t+3}, e'_{q-t+4}, \dots, e'_q$ dengan masing-masing $3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 2\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right), 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 3\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right), 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - 4\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right), \dots, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - t\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right)$.
- c. Untuk $1 \leq k \leq t-1$, label $e'_{1+k}, e'_{m+k}, e'_{2m+k-1}, e'_{3m+k-2}, e'_{4m+k-3}, \dots, e'_{n-m-t+k+1}$ dengan masing-masing $3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 1, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 2, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 3, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 4, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - 5, \dots, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) - k\left(\frac{q-t}{m-1} + 1\right) - \left(\frac{q-t}{m-1}\right)$.
- d. Untuk $t \leq k \leq m-2$, label $e'_{1+k}, e'_{m+k}, e'_{2m+k-1}, e'_{3m+k-2}, e'_{4m+k-3}, \dots, e'_{n-m-t+k+1}$ dengan masing-masing $3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m-k-1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 1, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m-k-1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 2, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m-k-1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 3, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m-k-1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 4, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m-k-1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - 5, \dots, 3n + t\left(\frac{n+m-t-2}{m-1}\right) + (m-k-1)\left(\frac{q-t}{m-1}\right) - \left(\frac{q-t}{m-1}\right)$.

Pelabelan pada sisi $f(e'_i)$: (5)

Misal e''_i , $1 \leq i \leq n-1$, dan misalkan $q = n-1$.

Kasus 1: $q \equiv 0 \pmod{m-1}$

- a. Label $e_1'', e_m'', e_{2m-1}'', e_{3m-2}'', e_{4m-3}'', \dots, e_{n-m+1}''$ dengan masing-masing $4n-1, 4n-1+1, 4n-1+2, 4n-1+3, 4n-1+4, 4n-1+5, \dots, 4n-1+\left(\frac{q}{m-1}-1\right)$.
- b. Untuk $1 \leq k \leq m-2$, Label $e_{1+k}'', e_{m+k}'', e_{2m+k-1}'', e_{3m+k-2}'', e_{4m+k-3}'', \dots, e_{n-m+k+1}''$ dengan masing-masing $4n-1+k\left(\frac{q}{m-1}\right), 4n-1+k\left(\frac{q}{m-1}\right)+1, 4n-1+k\left(\frac{q}{m-1}\right)+2, 4n-1+k\left(\frac{q}{m-1}\right)+3, 4n-1+k\left(\frac{q}{m-1}\right)+4, \dots, 4n-1+(k+1)\left(\frac{q}{m-1}\right)-1$.

Kasus 2: $q \equiv 1 \pmod{m-1}$

- a. Label $e_1'', e_m'', e_{2m-1}'', e_{3m-2}'', e_{4m-3}'', \dots, e_q''$ dengan masing-masing $4n-1, 4n-1+1, 4n-1+2, 4n-1+3, 4n-1+4, 4n-1+5, \dots, 4n-1+\left(\frac{q-1}{m-1}\right)$.
- b. Untuk $1 \leq k \leq m-2$, label $e_{1+k}'', e_{m+k}'', e_{2m+k-1}'', e_{3m+k-2}'', e_{4m+k-3}'', \dots, e_{n-m+k}''$ dengan masing-masing $4n+k\left(\frac{q-1}{m-1}\right), 4n+k\left(\frac{q-1}{m-1}\right)+1, 4n+k\left(\frac{q-1}{m-1}\right)+2, 4n+k\left(\frac{q-1}{m-1}\right)+3, 4n+k\left(\frac{q-1}{m-1}\right)+4, \dots, 4n+(k+1)\left(\frac{q-1}{m-1}\right)-1$.

Kasus 3: $q \equiv t \pmod{m-1}$, dimana $t = 2, 3, 4, \dots, m-2$

- a. Label $e_1'', e_m'', e_{2m-1}'', e_{3m-2}'', e_{4m-3}'', \dots, e_{q-t+1}''$ dengan masing-masing $4n-1, 4n-1+1, 4n-1+2, 4n-1+3, 4n-1+4, 4n-1+5, \dots, 4n-1+\left(\frac{q-t}{m-1}\right)$.
- b. Label $e_{q-t+2}'', e_{q-t+3}'', e_{q-t+4}'', \dots, e_q''$ dengan masing-masing $4n+2\left(\frac{q-t}{m-1}\right), 4n+3\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+1, 4n+4\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+2, \dots, 4n+t\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+(t-2)$.
- c. Untuk $1 \leq k \leq t$, label $e_{1+k}'', e_{m+k}'', e_{2m+k-1}'', e_{3m+k-2}'', e_{4m+k-3}'', \dots, e_{n-m-t+k+1}''$ dengan masing-masing $4n-1+k\left(\frac{q-t}{m-1}+1\right), 4n-1+k\left(\frac{q-t}{m-1}+1\right)+1, 4n-1+k\left(\frac{q-t}{m-1}+1\right)+2, 4n-1+k\left(\frac{q-t}{m-1}+1\right)+3, 4n-1+k\left(\frac{q-t}{m-1}+1\right)+4, \dots, 4n-1+k\left(\frac{q-t}{m-1}+1\right)+\left(\frac{q-t}{m-1}-1\right)$.
- d. Untuk $t+1 \leq k \leq m-2$, label $e_{1+k}'', e_{m+k}'', e_{2m+k-1}'', e_{3m+k-2}'', e_{4m+k-3}'', \dots, e_{n-m-t+k+1}''$ dengan masing-masing $4n+k\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+(t-1), 4n+k\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+(t-1)+1, 4n+k\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+(t-1)+2, 4n+k\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+(t-1)+3, 4n+k\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+(t-1)+4, \dots, 4n+k\left(\frac{q-t}{m-1}\right)+(t-1)+\left(\frac{q-t}{m-1}-1\right)$.

Pelabelan pada sisi $f(e_i''')$: (6)

Misal $e_i''', 1 \leq i \leq n-1$, dan misalkan $q = n-1$.

Kasus 1: $q \equiv 0 \pmod{m-1}$

- a. Label $e_1''', e_m''', e_{2m-1}'', e_{3m-2}'', e_{4m-3}'', \dots, e_{n-m+1}'''$ dengan masing-masing $6n-4, 6n-5, 6n-6, 6n-7, 6n-8, \dots, 6n-4-\left(\frac{q}{m-1}-1\right)$.
- b. Untuk $1 \leq k \leq m-2$, Label $e_{1+k}'', e_{m+k}'', e_{2m+k-1}'', e_{3m+k-2}'', e_{4m+k-3}'', \dots, e_{n-m+k+1}'''$ dengan masing-masing $6n-4-k\left(\frac{q}{m-1}\right), 6n-4-k\left(\frac{q}{m-1}\right)-1, 6n-4-k\left(\frac{q}{m-1}\right)-2, 6n-4-k\left(\frac{q}{m-1}\right)-3, 6n-4-k\left(\frac{q}{m-1}\right)-4, \dots, 6n-4-k\left(\frac{q}{m-1}\right)-\left(\frac{q}{m-1}-1\right)$.

Kasus 2: $q \equiv 1 \pmod{m-1}$

- a. Label $e_1''', e_m''', e_{2m-1}''', e_{3m-2}''', e_{4m-3}''', \dots, e_q'''$ dengan masing-masing $4n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right)$, $4n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - 1$, $4n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - 2$, $4n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - 3$, $4n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - 4$, \dots , $4n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - \left(\frac{q-1}{m-1} \right)$.
- b. Untuk $1 \leq k \leq m-2$, label $e_{1+k}''', e_{m+k}''', e_{2m+k-1}''', e_{3m+k-2}''', e_{4m+k-3}''', \dots, e_{n-m+k}'''$ dengan masing-masing $5n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - k \left(\frac{q-1}{m-1} \right) - 2$, $5n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - k \left(\frac{q-1}{m-1} \right) - 3$, $5n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - k \left(\frac{q-1}{m-1} \right) - 4$, $5n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - k \left(\frac{q-1}{m-1} \right) - 5$, $5n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - k \left(\frac{q-1}{m-1} \right) - 6$, \dots , $5n + m \left(\frac{n+m-3}{m-1} - 1 \right) - (k+1) \left(\frac{q-1}{m-1} \right) - 1$.

Kasus 3: $q \equiv t \pmod{m-1}$, dimana $t = 2, 3, 4, \dots, m-2$

- a. Label $e_1''', e_m''', e_{2m-1}''', e_{3m-2}''', e_{4m-3}''', \dots, e_{q-t+1}'''$ dengan masing-masing $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - 3$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - 4$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - 5$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - 6$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - 7$, \dots , $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 3$.
- b. Label $e_{q-t+2}''', e_{q-t+3}''', e_{q-t+4}''', \dots, e_q'''$ dengan masing-masing $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - 3 \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 1$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - 4 \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 2$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - 5 \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 3$, \dots , $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - (t+1) \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - (t-1)$
- c. Untuk $1 \leq k \leq t-1$, label $e_{1+k}''', e_{m+k}''', e_{2m+k-1}''', e_{3m+k-2}''', e_{4m+k-3}''', \dots, e_{n-m-t+k+1}'''$ dengan masing-masing $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - k \left(\frac{q-t}{m-1} + 1 \right) - 3$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - k \left(\frac{q-t}{m-1} + 1 \right) - 4$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - k \left(\frac{q-t}{m-1} + 1 \right) - 5$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - k \left(\frac{q-t}{m-1} + 1 \right) - 6$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - k \left(\frac{q-t}{m-1} + 1 \right) - 7$, \dots , $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) - k \left(\frac{q-t}{m-1} + 1 \right) - \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 2$.
- d. Untuk $t \leq k \leq m-2$, label $e_{1+k}''', e_{m+k}''', e_{2m+k-1}''', e_{3m+k-2}''', e_{4m+k-3}''', \dots, e_{n-m-t+k+1}'''$ dengan masing-masing $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) + (m-k-1) \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 3$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) + (m-k-1) \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 4$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) + (m-k-1) \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 5$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) + (m-k-1) \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 6$, $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) + (m-k-1) \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - 7$, \dots , $5n + t \left(\frac{n+m-t-2}{m-1} \right) + (m-k-1) \left(\frac{q-t}{m-1} \right) - \left(\frac{q-t}{m-1} - 1 \right)$.

Dapat dilihat bahwa f adalah fungsi bijektif dari $V(D_2(P_n)) \cup E(D_2(P_n))$ ke $\{1, 2, 3, \dots, 2(3n-2)\}$. notasi $\Sigma(D_2(P_m)^{(s)})$ merupakan jumlah kostanta ajaib untuk semua selimut $D_2(P_m)$ ke s dengan panjang m pada duplikasi graf lintasan $(D_2(P_n))$.

Dapat ditunjukkan dengan $f(V(D_2(P_n))) = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Untuk $1 \leq s \leq n-m$

$$f(v_s) + f(v'_s) = f(v_{m+s}) + f(v'_{m+s}) - 2 \dots \dots \dots (7)$$

$$f(e_s) = f(e_{m-1+s}) + 1 \dots \dots \dots (8)$$

$$f(e'_s) = f(e'_{m-1+s}) + 1 \dots \dots \dots (9)$$

$$f(e''_s) = f(e''_{m-1+s}) - 1 \dots \dots \dots (10)$$

$$f(e'''_s) = f(e'''_{m-1+s}) + 1 \dots \dots \dots (11)$$

Jumlah label titik - titik v_i dan sisi - sisi e_i yang masuk didalam selimut $D_2(P_m)^{(s)}$ dengan $1 \leq s \leq n-m+1$ dan $3 \leq m \leq n-1$ adalah $V(D_2(P_m)^{(s)}) = \{v_j, v'_j | s \leq j \leq s+m-1\}$ dan $E(D_2(P_m)^{(s)}) = \{e_j, e'_j, e''_j, e'''_j | s \leq j \leq s+m-2\}$. Dapat diverifikasi bahwa himpunan

titik $V(D_2(P_m)^{(s)}) \cap V(D_2(P_m)^{(s+1)}) = \{v_j, v'_j | s+1 \leq j \leq s+m-1\}$ dan himpunan sisi $E(D_2(P_m)^{(s)}) \cap E(D_2(P_m)^{(s+1)}) = \{e_j, e'_j, e''_j, e'''_j | s+1 \leq j \leq s+m-2\}$.

Dengan demikian, dari persamaan (7), (8), (9), (10) dan (11) dapat dirumuskan konstanta ajaib untuk semua selimut $D_2(P_m)^{(s)}$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum f(D_2(P_m)^{(s)}) &= \sum_{j=s}^{s+m-1} [f(v_j) + f(v'_j)] + \sum_{j=s}^{s+m-2} [f(e_j) + f(e'_j) + f(e''_j) + f(e'''_j)] \\ &= \sum_{j=s+1}^{s+m} [f(v_j) + f(v'_j)] + \sum_{j=s+1}^{s+m-1} [f(e_j) + f(e'_j) + f(e''_j) + f(e'''_j)] \\ &= \sum f(D_2(P_m)^{(s+1)}) \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil diatas dapat diperlihatkan bahwa konstanta ajaib untuk semua selimut adalah $\sum f(D_2(P_m)^{(s)}) = \sum f(D_2(P_m)^{(s+1)})$. Dengan demikian duplikasi graf lintasan $D_2(P_n)$ memiliki pelabelan selimut ajaib super berbentuk $D_2(P_m)$ untuk $n \geq 4$ dan $3 \leq m \leq n-1$.

Teorema 2. Graf $D_2(P_n)$ memiliki pelabelan selimut ajaib super berbentuk $D_2(P_m)$ untuk $n \geq 4$ dan $3 \leq m \leq n-1$.

Bukti:

Dengan menggunakan Teorema 1, dan mengambil label titik dan sisi yang baru berupa:

$$f'(v_i) = n+1 - f(v_i)$$

$$f'(v'_i) = 3n+1 - f(v'_i)$$

$$f'(e_i) = 6n - n - 4 + 4 - f(e_i)$$

$$f'(e'_i) = 6n + n - 4 + 2 - f(e'_i)$$

$$f'(e''_i) = 6n + 3n - 4 - f(e''_i)$$

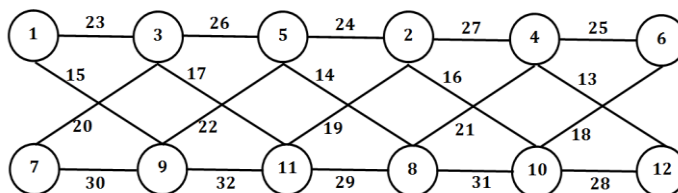
$$f'(e'''_i) = 6n + 5n - 4 - 2 - f(e'''_i)$$

Dimana $f(v_i)$ adalah titik yang memenuhi persamaan (1), $f(v'_i)$ adalah titik yang memenuhi persamaan (2), $f'(e_i)$ adalah sisi yang memenuhi persamaan (3), $f(e'_i)$ adalah sisi yang memenuhi persamaan (4), $f(e''_i)$ adalah sisi yang memenuhi persamaan (5) dan $f(e'''_i)$ adalah sisi yang memenuhi persamaan (6).

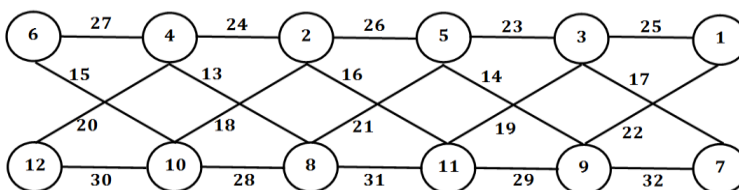
Berdasarkan hasil diatas dapat diperlihatkan bahwa konstanta ajaib untuk semua selimut adalah $\sum f(D_2(P_m)^{(s)}) = \sum f(D_2(P_m)^{(s+1)})$. Dengan demikian duplikasi graf lintasan

$D_2(P_n)$ memiliki pelabelan selimut ajaib super berbentuk $D_2(P_m)'$ untuk $n \geq 4$ dan $3 \leq m \leq n - 1$.

Sebagai contoh kasus memberikan label titik dan sisi dapat dilihat pada Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 3 : Pelabelan Titik dan Sisi Selimut $D_2(P_3)$ pada Graf $D_2(P_6)$ pada Teorema 1



Gambar 4 : Pelabelan Titik dan Sisi Selimut $D_2(P_3)$ pada Graf $D_2(P_6)'$ pada Teorema 2

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa duplikasi dari graf lintasan ($D_2(P_n)$) memiliki pelabelan selimut ajaib super berbentuk $D_2(P_m)$ untuk $n \geq 4$ dan $3 \leq m \leq n - 1$ dengan konstanta ajaib untuk semua selimut adalah $\sum f(D_2(P_m)^{(s)}) = \sum f(D_2(P_m)^{(s+1)})$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Baskoro, E, T, Miller, M, Slamin, dan Wallis, W, D, *Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf*, Institut Teknologi Bandung 2007, Bandung.
- [2] Cunningham, D, *Vertex-magic*, Electronic Journal of Undergraduate Mathematics 9, 2004, 1-20.
- [3] Gallian, A, J, *A Dynamic Survey of Graph Labeling*, U.S.A , University of Minnesota Duluth, 19, 2016, 150-153.
- [4] Gutierrez, A., dan Lladσ A, *Magic coverings*, J, Combin, Math, Combin, Comput. 55 , 2005, 43-56.

- [5] Jayanthi, P, Salvagopal, P, dan Sundaram, S, Soma, *Some C_3 – Supermagic Graphs*, *Util. Math*, 89, 2012, 357-366.
- [6] Jayanthi, P, dan Muthuraja, N, T, *Some Cycle-Super Magic Graphs*, *Internat. J. Math. Soft Comput*, 4(2), 2014, 173-144.
- [7] Kotzig, A., and Rosa, A, *Magic Valuations of finite Graphs*, *Canad. Math. Bull*, 13, 1970, 451-461.
- [8] Lladó, A., dan Moragas, J, *Cycle-magic graphs*, *Discrete Math*, 307 : 23, 2007, 2925-293.
- [9] Maryati, T, K, Baskoro, E,T, dan Salman, A, N, M, *P_k - supermagic labelings of some trees*, *J. Combin. Math. Combin. Comput*, 65, 2008, 197-207.
- [10] Maryati, T, K, Salman, A, N, M, Baskoro, E, T, dan Irawati, *On The Path-(super) Magicness of a Cycle With Some Pendants*, *Util. Math*, 96, 2015, 319-330.
- [11] Ngurah, A, A, G, Salman, A, N, M, dan Susilowati, L, *H-supermagic labelings of graphs*, *Discrete Math*, 310 : 8, 2008, 1293-1300.
- [12] Ngurah, A, A,G, Salman, A, N, M, dan Sudarsana, I, W, *On supermagic coverings of fans and ladders*, *SUT Jurnal of Mathematics Vol. 46, No.1, 2010* ,67-78. Tokyo University of Science, Kagazaka, Sahinjuku-ku, Tokyo Japan.
- [13] Roswitha, M, Baskoro, E, T., Maryati, T, K., Kurdhi, N, A., dan Susanti, I, *Father Results on Cycle-Supermagic labeling*, *AKCE Int. J. Graphs Comb*, 10(2), 2013, 211-220.
- [14] Selvagopal, P, dan Jayanthi, P, *On C_k – Supermagic Graphs*, *International Journal Mathematics and Scientific Computing, Sci*, 3, 2008, 25-30.
- [15] Vaidya, S, K, dan Shah, N, *Some New Families of Prime Cordial Graphs*, *Journal of Mathematics Research*, 3 (4), 2011, 1-10, Tersedia online: www.ccsenet.org/jmr.