

MODEL DINAMIK FASE PERTUMBUHAN BUAH KELAPA

Yulinda¹, A. I. Jaya² dan R. Ratianingsih³

^{1,2,3} Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako

Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia

¹yulinda.math11@yahoo.com, ²jayaindraagus@gmail.com, ³ratianingsih@yahoo.com

ABSTRACT

Coconut (*Cocos nucifera* L.) is one of the Indonesian potential natural plant resources. Its fruit is a main part of the tree that plays an important role in raw materials industry. It is because the material could be processed to be a beneficial various products. The diversity of the coconut fruit products leads to the importance of the study on coconut growth phase development. The model is expressed in a system of differential equation $\frac{dM}{dt} = R - \alpha M - \mu_1 M$, $\frac{dP}{dt} = \alpha M - \mu_2 P - \beta P$, $\frac{dC}{dt} = \beta P - \mu_3 C - \epsilon C$, $\frac{dM_a}{dt} = \epsilon C - \mu_4 M_a - \gamma M_a$, $\frac{dM_s}{dt} = \gamma M_a - \mu_5 M_s - \sigma M_s$, $\frac{dM_p}{dt} = \sigma M_s - \mu_6 M_p$. The dynamic of coconut growth phase is studied by consider its stability at the critical point. The stability is determined using linearization method. The solution is analyzed both analitically and numerically. Simulated a stable endemic critical point indicates that the coconut production could be well prevent in each phase of growth.

Keywords : Model, Stability Analysis, Simulating the Stability

ABSTRAK

Tanaman kelapa (*Cocos nucifera* L.) termasuk salah satu sumber daya alam hayati Indonesia yang cukup potensial. Buah adalah bagian utama dari tanaman kelapa yang berperan sebagai bahan baku industri. Buah kelapa merupakan bahan baku yang dapat diolah menjadi aneka produk yang bermanfaat bagi manusia. Beragamnya produk olahan buah kelapa membuat perkembangan pertumbuhan buah kelapa dari fase ke fase menjadi penting untuk dikaji dengan model matematika. Model tersebut dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial $\frac{dM}{dt} = R - \alpha M - \mu_1 M$, $\frac{dP}{dt} = \alpha M - \mu_2 P - \beta P$, $\frac{dC}{dt} = \beta P - \mu_3 C - \epsilon C$, $\frac{dM_a}{dt} = \epsilon C - \mu_4 M_a - \gamma M_a$, $\frac{dM_s}{dt} = \gamma M_a - \mu_5 M_s - \sigma M_s$, $\frac{dM_p}{dt} = \sigma M_s - \mu_6 M_p$. Model dinamik fase pertumbuhan buah kelapa yang dibangun akan dikaji kestabilannya di titik kritis endemik dengan metode linearisasi. Simulasi model secara numerik maupun analitik memperlihatkan perpindahan fase pertumbuhan kelapa dengan baik. Terjaganya titik kritis endemik mengindikasikan terjaganya produksi buah kelapa yang dihasilkan.

Kata Kunci : Analisis Kestabilan, Model, Simulasi kestabilan

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Tanaman kelapa (*Cocos nucifera* L.) termasuk salah satu sumber daya alam hayati Indonesia yang cukup potensial (Fachry dkk, 2006). Seluruh bagian pohon kelapa dapat dimanfaatkan untuk kepentingan manusia, sehingga pohon ini sering disebut pohon kehidupan karena hampir seluruh bagian dari pohon, akar, batang, daun dan buahnya dapat dipergunakan untuk kebutuhan manusia sehari-hari (Amrullah, 2012). Buah kelapa merupakan bahan baku yang dapat diolah menjadi aneka produk yang bermanfaat bagi manusia (Fitriyah, 2012). Produk olahan daging buah yang paling banyak dilakukan masyarakat Indonesia adalah kopra. Untuk produksi minyak dan kopra dibutuhkan buah kelapa yang matang rata-rata berumur 10 – 12 bulan (Rindengan dkk, Tanpa Tahun). Namun minyak kelapa murni yang memiliki nilai tambah tinggi justru belum banyak dikembangkan di Indonesia, Minyak kelapa murni merupakan bahan baku Industri pangan, farmasi, dan kosmetik untuk perawatan tubuh (Muala, 2010). Beragamnya produk olahan kelapa membuat perkembangan pertumbuhan buah kelapa dari fase ke fase menjadi penting untuk dikaji. Dalam penelitian ini, fase pertumbuhan buah kelapa dikaji dengan model matematika.

Dalam model tersebut, fase pertama adalah manggar kelapa yang akan berubah menjadi cikal bakal setelah melewati penyerbukan bunga. Cikal bakal inilah yang akan menjadi buah kelapa matang awal, lalu berpindah ke fase matang sedang dan terakhir fase matang penuh. Model linier yang dibangun akan dikaji kestabilannya di titik kritis endemik dengan persamaan karakteristik. Simulasi dilakukan untuk menggambarkan dinamika populasi di setiap fase pertumbuhan. Dinamika populasi di setiap fase pertumbuhan kelapa sangat menentukan produksi kelapa yang optimal. Karenanya kajian kestabilan model yang merepresentasikannya sangat bermanfaat. Selain mengkaji model linier, penelitian ini juga membahas penentuan solusi analitik model. Solusi analitik diperoleh dengan menggunakan metode persamaan diferensial variabel terpisah dan persamaan diferensial linier orde satu.

1.2. Rumusan Masalah

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Bagaimana model matematika fase pertumbuhan buah kelapa
2. Bagaimana kestabilan model matematika fase pertumbuhan buah kelapa
3. Bagaimana simulasi dinamika populasi disetiap fase pertumbuhan buah kelapa.
4. Bagaimana solusi analitik model matematika fase pertumbuhan buah kelapa
5. Bagaimana plot solusi analitik dinamika populasi fase pertumbuhan buah kelapa

1.3. Tujuan

Dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat antara lain:

1. Mendapatkan model matematika fase pertumbuhan buah kelapa

2. Mendapatkan kestabilan model fase pertumbuhan buah kelapa
3. Mengetahui dinamika populasi disetiap fase pertumbuhan buah kelapa melalui simulasi.
4. Mendapatkan solusi analitik model matematika fase pertumbuhan buah kelapa
5. Mendapatkan plot solusi analitik dinamika populasi fase pertumbuhan buah kelapa.

1.4. Manfaat Penelitian

Adapun Manfaat yang dapat diberikan pada penelitian ini adalah:

1. Meningkatkan pemahaman tentang model pertumbuhan buah kelapa
2. Sebagai bahan referensi untuk penelitian selanjutnya.
3. untuk mengembangkan ilmu matematika terutama di bidang pertanian

II. METODE PENELITIAN

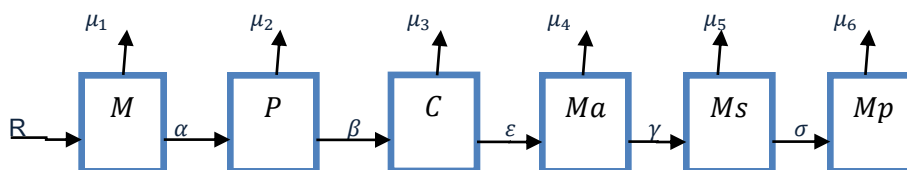
Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu

1. Memulai penelitian.
2. Mengkaji literatur.
3. Membangun model dinamik perubahan fase pertumbuhan buah kelapa.
4. Menganalisis kestabilan model perubahan fase pertumbuhan buah kelapa.
5. Simulasi model.
6. Mementukan solusi analitik.
7. Plot solusi analitik.
8. Membandingkan simulasi model dengan plot solusi analitik.
9. Kesimpulan .
10. Selesai.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Kontruksi Model Dinamik Fase Pertumbuhan Buah Kelapa

Kontruksi model menggambarkan fase-fase pertumbuhan buah kelapa dinyatakan pada Gambar 1.



Gambar 1 : Diagram alur perpindahan setiap fase pertumbuhan buah kelapa.

Sehingga dari diagram kompartemen pada Gambar 1. didapatkan model matematika yang menggambarkan perubahan fase pertumbuhan buah kelapa terhadap waktu disetiap subpopulasi sebagai berikut:

$$\frac{dM}{dt} = R - \alpha M - \mu_1 M \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \alpha M - \mu_2 P - \beta P \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{dC}{dt} = \beta P - \mu_3 C - \varepsilon C \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{dMa}{dt} = \varepsilon C - \mu_4 Ma - \gamma Ma \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{dMs}{dt} = \gamma Ma - \mu_5 Ms - \sigma Ms \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{dMp}{dt} = \sigma Ms - \mu_6 Mp \dots\dots\dots (6)$$

3.2 Menentukan Titik Kritis

Titik kritis diperoleh dengan memandang persamaan (3.1) – (3.6) dalam keadaan stagnan atau tidak terdapat perubahan dalam populasi sebagai berikut:

$$\frac{dM}{dt} = 0, \frac{dP}{dt} = 0, \frac{dC}{dt} = 0, \frac{dMa}{dt} = 0, \frac{dMs}{dt} = 0, \frac{dMp}{dt} = 0.$$

Sehingga dapat dinyatakan:

$$R - (\alpha + \mu_1)M = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\alpha M - (\mu_2 + \beta)P = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\beta P - (\mu_3 + \varepsilon)C = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$\varepsilon C - (\mu_4 + \gamma)Ma = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\sigma Ms - (\mu_5 + \sigma) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\mu_6 Mp - \sigma Ms = 0 \dots\dots\dots (12)$$

Dengan demikian diperoleh titik kritis dari model perubahan fase pertumbuhan buah kelapa adalah $T = (M, P, C, Ma, Ms, Mp)$, dengan sebagai berikut:

$$T = \left(\frac{R}{(\alpha + \mu_1)}, \frac{\alpha R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)}, \frac{\alpha \beta R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)(\varepsilon + \mu_3)}, \frac{\alpha \beta \varepsilon \gamma R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)(\varepsilon + \mu_3)(\gamma + \mu_4)}, \frac{\alpha \beta \varepsilon \gamma \sigma R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)(\varepsilon + \mu_3)(\gamma + \mu_4)(\sigma + \mu_5)}, \frac{\alpha \beta \varepsilon \gamma \sigma R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)(\varepsilon + \mu_3)(\gamma + \mu_4)(\sigma + \mu_5)(\mu_6)} \right)$$

Kestabilan titik kritis T ditentukan dari SPD dalam dalam Matriks jacobi (U, V, W, X, Y, Z) dengan $U = M - \frac{R}{(\alpha + \mu_1)}$, $V = P - \left(\frac{\alpha R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)} \right)$, $W = C - \frac{\alpha \beta R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)(\varepsilon + \mu_3)}$, $X = Ma - \frac{\alpha \beta \varepsilon R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)(\varepsilon + \mu_3)(\gamma + \mu_4)}$, $Y = Ms - \frac{\alpha \beta \varepsilon \gamma R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)(\varepsilon + \mu_3)(\gamma + \mu_4)(\sigma + \mu_5)}$ dan $Z = Mp - \frac{\alpha \beta \varepsilon \gamma \sigma R}{(\alpha + \mu_1)(\beta + \mu_2)(\varepsilon + \mu_3)(\gamma + \mu_4)(\sigma + \mu_5)(\mu_6)}$. Adalah variabel yang mentransformasikan koordinat M, P, C, Ma, Ms , dan Mp sehingga titik kritis T adalah titik kritis nol dalam sistem koordinat yang baru. Matriks tersebut dinyatakan sebagai J sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -\mu_2 - \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\mu_3 - \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & -\mu_4 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_5 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & -\mu_6 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks J diperoleh dari $\det(J - \lambda I) = 0$ sebagai berikut :

$$\det \begin{bmatrix} -\mu_1 - \alpha - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -\mu_2 - \beta - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\mu_3 - \epsilon - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & -\mu_4 - \gamma - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_5 - \sigma - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & -\mu_6 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Mengingat determinan dari matriks dengan koefisien-koefisien pada bagian segitiga atas adalah nol maka diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut :

$$(-\mu_1 - \alpha - \lambda)(-\mu_2 - \beta - \lambda)(-\mu_3 - \epsilon - \lambda)(-\mu_4 - \gamma - \lambda)(-\mu_5 - \sigma - \lambda)(-\mu_6 - \lambda) = 0$$

Persamaan tersebut memberikan nilai-nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -\mu_1 - \alpha, \lambda_2 = -\mu_2 - \beta, \lambda_3 = -\mu_3 - \epsilon, \lambda_4 = -\mu_4 - \gamma, \lambda_5 = -\mu_5 - \sigma, \lambda_6 = -\mu_6$$

Mengingat semua nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ dan λ_6 adalah negatif, maka titik kritis T adalah stabil.

3.3 Simulasi

3.3.1 Dinamika Fase Pertumbuhan Buah Kelapa Berdasarkan Data Referensi

Kurva pertumbuhan digambarkan untuk kondisi awal manggar kelapa berjumlah 1, bunga betina kelapa dalam satu manggar saat penyerbukan 20, cikal bakal 10, matang awal 10, matang sedang 10 dan dan matang penuh 10. Interval pengamatan dilakukan selama 365 hari.

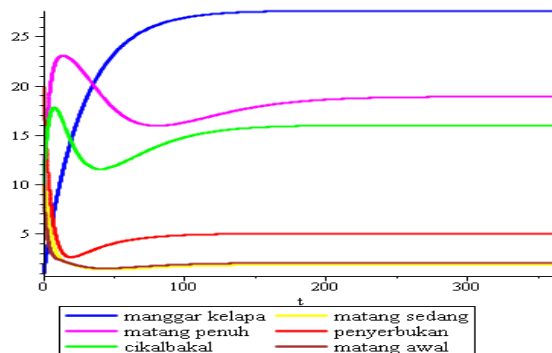
Nilai-nilai parameter yang digunakan dalam menggambarkan kurva pertumbuhan tersebut dinyatakan dalam Tabel 1.

Tabel 1 : Nilai Parameter

Parameter	Keterangan	Data Referensi		Data Bangkitan	
		Nilai	Sumber	Nilai	Sumber
R	Rekrutmen manggar	1	Kridanto, 2016	1	Kridanto, 2016
α	Laju perubahan dari M ke P	0,0334	$\frac{1}{\text{lifetime}}$ x jumlah populasi	0,07	Asumsi
β	Laju perubahan dari P ke C	0,1667	$\frac{1}{\text{lifetime}}$ x jumlah populasi	0,069	Asumsi

ε	Laju perubahan dari C ke Ma	0,04762	$\frac{1}{\text{lifetime}} \times \text{jumlah populasi}$	0,04762	Asumsi
μ_1	Laju kematian alami manggar	0,002222	$\frac{1}{\text{lifetime}}$	0,0027397	Asumsi
μ_2	Laju kematian alami setelah penyerbukan	0,01666	$\frac{1}{\text{lifetime}}$	0,02666	Asumsi
μ_3	Laju kematian alami cikalbakal	0,0047619	$\frac{1}{\text{lifetime}}$	0,0219	Asumsi
μ_4	Laju kematian alami buah kelapa matang awal	0,03334	$\frac{1}{\text{lifetime}}$	0,0079534	Asumsi
μ_5	Laju kematian alami buah kelapa matang sedang	0,03334	$\frac{1}{\text{lifetime}}$	0,009334	Asumsi
μ_6	Laju kematian alami buah kelapa matang penuh	0,03334	$\frac{1}{\text{lifetime}}$	0,02999	Asumsi
γ	Laju perubahan dari Ma ke Ms	0,334	$\frac{1}{\text{lifetime}} \times \text{jumlah populasi}$	0,039	Asumsi
σ	Laju perubahan dari Ms ke Mp	0,334	$\frac{1}{\text{lifetime}} \times \text{jumlah populasi}$	0,029	Asumsi

Kurva pertumbuhan populasi di setiap fase pertumbuhan populasi ditampilkan pada Gambar 2.



Gambar 2 : Kurva Pertumbuhan di Tiap Fase Pertumbuhan terhadap Waktu

Gambar 2 memperlihatkan bahwa banyaknya manggar kelapa meningkat hingga mencapai 29 pada hari ke 150 dan kemudian banyaknya manggar tetap sampai hari 365. Banyaknya manggar yang sampai ke fase penyerbukan bunga betina mengalami penurunan sampai hari ke 20 kemudian mengalami peningkatan pada hari ke 130 dengan jumlah 5 kemudian jumlahnya tetap setelah hari ke 150 sampai hari ke 365. Cikal bakal mengalami peningkatan sampai hari ke 8 dengan jumlah 8 kemudian menurun sampai hari ke 40 dengan jumlah cikal bakal 1 dan kemudian meningkat lagi sampai hari ke 200 menjadi 6 untuk kemudian tetap dalam jumlah tersebut pada hari ke 210 sampai hari ke 365. Banyaknya buah kelapa matang awal mengalami penurunan sampai hari ke 40 hingga mencapai 1 buah dan kemudian meningkat pada hari ke 150 menjadi 2 buah dan tetap dalam jumlah tersebut pada hari ke 160 sampai hari ke 365. Banyaknya buah kelapa matang sedang menurun sampai hari ke 50 dengan jumlah populasi 1 buah kemudian meningkat pada hari ke 210 menjadi 2 buah dan tetap dalam jumlah tersebut pada hari ke 220 sampai hari ke 365. Banyaknya buah kelapa matang penuh mengalami peningkatan sampai hari ke 15 hingga mencapai 23 buah kelapa untuk kemudian mengalami penurunan sampai hari ke 80 hingga mencapai 16 buah dan kemudian meningkat lagi pada hari ke 300 dengan jumlah 19 buah dan tetap dalam jumlah tersebut pada hari 310 sampai hari ke 365.

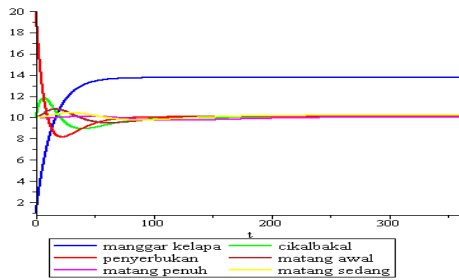
Fenomena penurunan kurva pertumbuhan di tiap fase disebabkan oleh tingkat perpindahan populasi pada suatu fase pertumbuhan lebih kecil dari tingkat perpindahan populasi ke fase berikutnya. Sebaliknya, peningkatan kurva pertumbuhan diakibatkan oleh tingkat perpindahan populasi pada suatu fase pertumbuhan yang masuk lebih besar dari tingkat perpindahan populasi ke fase berikutnya. Selain dipengaruhi oleh tingkat perpindahan, tingkat kematian alami juga memberi pengaruh terhadap penurunan pada kurva pertumbuhan.

Simulasi pada Gambar 2 memperlihatkan kondisi fase pertumbuhan buah kelapa yang tidak normal. Untuk itu, dalam penelitian ini dibuat pula simulasi fase pertumbuhan buah kelapa dengan data bangkitan untuk mendapatkan simulasi fase pertumbuhan buah kelapa secara normal .

3.3.2 Dinamika Fase Pertumbuhan Buah Kelapa berdasarkan Data Bangkitan

Nilai-nilai parameter yang dilakukan dalam menggambarkan kurva pertumbuhan buah kelapa diperoleh dari Tabel 1.

Untuk data bangkitan kurva-kurva fase pertumbuhan ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3 : Kurva Pertumbuhan di tiap Fase Pertumbuhan terhadap Waktu

Gambar 3 memperlihatkan bahwa banyaknya manggar kelapa meningkat hingga mencapai 13 pada hari ke 150 dan kemudian banyaknya manggar tetap sampai hari 365. Banyaknya manggar yang sampai ke fase penyerbukan bunga betina mengalami penurunan sampai hari ke 29 selanjutnya mengalami peningkatan pada hari ke 90 dengan jumlah 10 kemudian jumlahnya tetap setelah hari ke 90 sampai hari ke 365 dan dalam suatu kondisi kurva mengalami penurunan kemudian meningkat yang disebabkan laju perubahan dari populasi manggar ke penyerbukan lebih cepat daripada laju perubahan dari populasi penyerbukan ke populasi cikal bakal. Cikal bakal mengalami peningkatan sampai hari ke 7 dengan jumlah 12 kemudian menurun sampai hari ke 41 dengan jumlah cikal bakal 9 dan kemudian meningkat lagi sampai hari ke 200 menjadi 10 untuk kemudian tetap dalam jumlah tersebut pada hari ke 200 sampai hari ke 365. Banyaknya buah kelapa matang awal mengalami penurunan sampai hari ke 65 hingga mencapai 9 buah dan kemudian meningkat pada hari ke 230 menjadi 10 buah dan tetap dalam jumlah tersebut sampai hari ke 365. Banyaknya buah kelapa matang sedang menurun sampai hari ke 90 dengan jumlah populasi 9 buah kemudian meningkat pada hari ke 330 menjadi 10 buah dan tetap dalam jumlah tersebut sampai hari ke 365. Banyaknya buah kelapa matang penuh mengalami penurunan sampai hari ke 125 hingga mencapai 9 buah dan kemudian meningkat lagi pada hari ke 360 dengan jumlah 10 buah dan tetap dalam jumlah tersebut sampai hari ke 365.

3.4 Solusi Analitik

penelitian ini juga membahas penentuan solusi analitik model untuk membandingkan hasil plot solusi analitik dengan simulasi model dinamik. Solusi analitik $M(t)$ diperoleh dengan merubah persamaan (1) dengan nilai awal $M(0) = 1$ sebagai suatu persamaan diferensial variabel terpisah sehingga diperoleh:

$$M(t) = \frac{(R - (\alpha + \mu_1))e^{-(\alpha + \mu_1)t}}{(-\alpha - \mu_1)} - \frac{R}{(-\alpha - \mu_1)} \dots\dots\dots (13)$$

Solusi analitik $P(t)$ diperoleh dengan merubah persamaan (2) dengan nilai awal $P(0) = 20$ sebagai suatu persamaan linear orde satu sehingga diperoleh:

$$P(t) = \frac{(R - (\alpha + \mu_1))\alpha e^{-(\alpha + \mu_1)t}}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} - \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)} + (20 - \frac{\alpha}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)})e^{-(\mu_2 + \beta)t} \dots\dots\dots (14)$$

Solusi analitik $C(t)$ diperoleh dengan merubah persamaan (3) dengan nilai awal $C(0) = 10$ sebagai suatu persamaan linear orde satu sehingga diperoleh:

$$C(t) = (\frac{(R - (\alpha + \mu_1))\alpha\beta e^{-(\alpha + \mu_1)t}}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)} - \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)} + \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)})\beta e^{-(\mu_2 + \beta)t}}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)} + ((10 - \frac{(R - (\alpha + \mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)})\beta}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)})e^{-(\mu_3 + \varepsilon)t}) \dots\dots\dots (15)$$

Solusi analitik $Ma(t)$ diperoleh dengan merubah persamaan (4) dengan nilai awal $Ma(0) = 10$ sebagai suatu persamaan linear orde satu sehingga diperoleh:

$$Ma(t) = \frac{(R - (\alpha + \mu_1))\alpha\beta\varepsilon e^{-(\alpha + \mu_1)t}}{-\alpha - \mu_1(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)(-\alpha - \mu_1 + \mu_4 + \gamma)} - \frac{\alpha\beta\varepsilon R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)(\mu_4 + \gamma)} + \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)})\beta\varepsilon e^{-(\mu_2 + \beta)t}}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)(-\mu_2 - \beta + \mu_4 + \gamma)} + \frac{(10 - \frac{(R - (\alpha + \mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)})\beta}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)})\varepsilon e^{-(\mu_3 + \varepsilon)t}}{(-\mu_3 - \varepsilon + \mu_4 + \gamma)} + \frac{(10 - \frac{(R - (\alpha + \mu_1))\alpha\beta\varepsilon}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)(-\alpha - \mu_1 + \mu_4 + \gamma)} + \frac{\alpha\beta\varepsilon R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)(\mu_4 + \gamma)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)})\beta\varepsilon}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)(-\mu_2 - \beta + \mu_4 + \gamma)} + \frac{(10 - \frac{(R - (\alpha + \mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)})\beta}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)})\varepsilon}{(-\mu_3 - \varepsilon + \mu_4 + \gamma)})e^{-(\mu_4 + \gamma)t} \dots\dots\dots (16)$$

Solusi analitik $Ms(t)$ diperoleh dengan merubah persamaan (5) dengan nilai awal $Ms(0) = 10$ sebagai suatu persamaan linear orde satu sehingga diperoleh:

$$Ms(t) = \frac{(R - (\alpha + \mu_1))\alpha\beta\varepsilon\gamma e^{-(\alpha + \mu_1)t}}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)(-\alpha - \mu_1 + \mu_4 + \gamma)(-\alpha - \mu_1 + \mu_5 + \sigma)} - \frac{\alpha\beta\varepsilon\gamma R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)(\mu_4 + \gamma)(\mu_5 + \sigma)} + \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)})\beta\varepsilon\gamma e^{-(\mu_2 + \beta)t}}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)(-\mu_2 - \beta + \mu_4 + \gamma)(-\mu_2 - \beta + \mu_5 + \sigma)} + \dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}
& \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)} \right) \epsilon \gamma e^{-(\mu_3+\epsilon)t} \\
& \frac{(-\mu_3 - \epsilon + \mu_4 + \gamma)(-\mu_3 - \epsilon + \mu_5 + \sigma)}{+ \left(\left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta\epsilon}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)(-\alpha-\mu_1+\mu_4+\gamma)} + \right. \right. \\
& \frac{\alpha\beta\epsilon R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)(\mu_4+\gamma)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta\epsilon}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)(-\mu_2-\beta+\mu_4+\gamma)} - \\
& \left. \left. \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)} \right) \epsilon \right) \frac{\gamma e^{-(\mu_4+\gamma)t}}{(-\mu_4-\gamma+\mu_5+\sigma)} \right) \\
& + \left(\left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta\epsilon\gamma}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)(-\alpha-\mu_1+\mu_4+\gamma)(-\alpha-\mu_1+\mu_5+\sigma)} + \right. \right. \\
& \frac{\alpha\beta\epsilon\gamma R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)(\mu_4+\gamma)(\mu_5+\sigma)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta\epsilon\gamma}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)(-\mu_2-\beta+\mu_4+\gamma)(-\mu_2-\beta+\mu_5+\sigma)} \\
& \left. \left. - \frac{\left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)} \right) \epsilon \gamma \right)}{(-\mu_3 - \epsilon + \mu_4 + \gamma)(-\mu_3 - \epsilon + \mu_5 + \sigma)} \right) \\
& - \left(\left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta\epsilon}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)(-\alpha-\mu_1+\mu_4+\gamma)} + \right. \right. \\
& \frac{\alpha\beta\epsilon R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)(\mu_4+\gamma)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta\epsilon}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)(-\mu_2-\beta+\mu_4+\gamma)} - \\
& \left. \left. \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)} \right) \epsilon \right) \right) \\
& \frac{\gamma}{(-\mu_4-\gamma+\mu_5+\sigma)} e^{-(\mu_5+\sigma)t} \dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

Solusi analitik $Mp(t)$ diperoleh dengan merubah persamaan (6) dengan nilai awal $Mp(0) = 10$ sebagai suatu persamaan linear orde satu sehingga diperoleh:

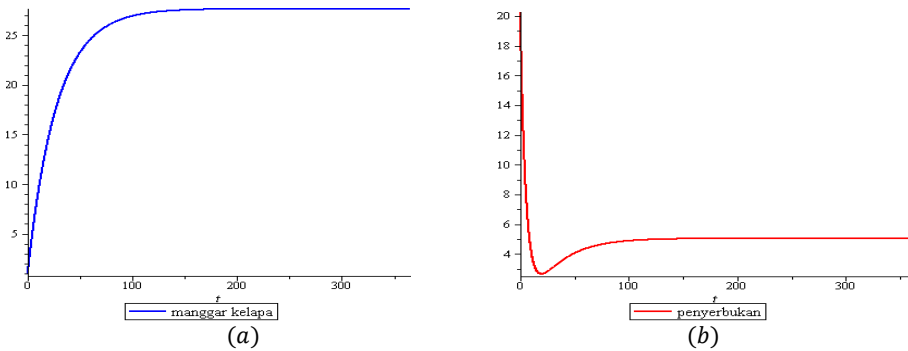
$$\begin{aligned}
Mp(t) = & 10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta\epsilon\gamma\sigma e^{-(\alpha+\mu_1)t}}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)(-\alpha-\mu_1+\mu_4+\gamma)(-\alpha-\mu_1+\mu_5+\sigma)(-\alpha-\mu_1+\mu_6)} \\
& - \frac{\alpha\beta\epsilon\gamma\sigma R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)(\mu_4+\gamma)(\mu_5+\sigma)\mu_6} + \\
& \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)} \right) \beta\epsilon\gamma\sigma e^{-(\mu_2+\beta)t}}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)(-\mu_2-\beta+\mu_4+\gamma)(-\mu_2-\beta+\mu_5+\sigma)(-\mu_2-\beta+\mu_6)} + \\
& \frac{\left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\epsilon)} \right) \epsilon \gamma \sigma e^{-(\mu_3+\epsilon)t}}{(-\mu_3 - \epsilon + \mu_4 + \gamma)(-\mu_3 - \epsilon + \mu_5 + \sigma)(-\mu_3 - \epsilon + \mu_6)} \\
& + \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta\epsilon}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\epsilon)(-\alpha-\mu_1+\mu_4+\gamma)} + \frac{\alpha\beta\epsilon R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\epsilon)(\mu_4+\gamma)} - \right.
\end{aligned}$$

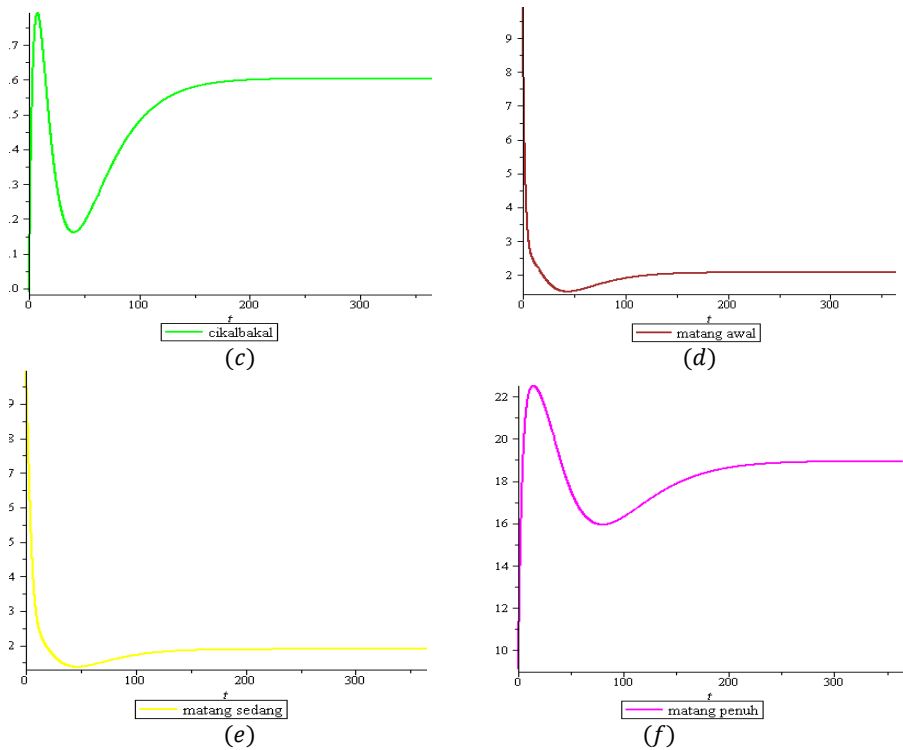
$$\begin{aligned}
& \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)}\right) \beta \varepsilon}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)(-\mu_2 - \beta + \mu_4 + \gamma)} - \\
& \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\varepsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\varepsilon)} - \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)}\right) \beta}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)}\right) \varepsilon \Bigg) \\
& \frac{\gamma \sigma e^{-(\mu_4+\gamma)t}}{(-\mu_4 - \gamma + \mu_5 + \sigma)(-\mu_4 - \gamma + \mu_6)} + \\
& \left(10 - \frac{(R - (\alpha + \mu_1)) \alpha \beta \varepsilon \gamma}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)(-\alpha - \mu_1 + \mu_4 + \gamma)(-\alpha - \mu_1 + \mu_5 + \sigma)} + \right. \\
& \frac{\alpha \beta \varepsilon \gamma R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)(\mu_4 + \gamma)(\mu_5 + \sigma)} - \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)}\right) \beta \varepsilon \gamma}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)(-\mu_2 - \beta + \mu_4 + \gamma)(-\mu_2 - \beta + \mu_5 + \sigma)} - \\
& \left. \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\varepsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\varepsilon)} - \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)}\right) \beta}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)}\right) \varepsilon \gamma \right) \\
& \frac{\varepsilon \gamma}{(-\mu_3 - \varepsilon + \mu_4 + \gamma)(-\mu_3 - \varepsilon + \mu_5 + \sigma)} \\
& - \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta\varepsilon}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\varepsilon)(-\alpha-\mu_1+\mu_4+\gamma)} + \frac{\alpha\beta\varepsilon R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\varepsilon)(\mu_4+\gamma)}\right) \\
& \frac{\varepsilon}{(-\mu_4 - \gamma + \mu_5 + \sigma)} \\
& - \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)}\right) \beta \varepsilon}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)(-\mu_2 - \beta + \mu_4 + \gamma)} - \\
& \frac{\varepsilon}{(-\mu_4 - \gamma + \mu_5 + \sigma)} \Bigg) \gamma \left. \frac{\sigma e^{-(\mu_5+\sigma)}}{(\mu_5 + \sigma + \mu_6)} \right) \\
& + \left(10 - \frac{(R - (\alpha + \mu_1)) \alpha \beta \varepsilon \gamma \sigma}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)(-\alpha - \mu_1 + \mu_4 + \gamma)(-\alpha - \mu_1 + \mu_5 + \sigma)(-\alpha - \mu_1 + \mu_6)} \right. \\
& + \frac{\alpha \beta \varepsilon \gamma \sigma R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)(\mu_4 + \gamma)(\mu_5 + \sigma)\mu_6} - \\
& \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)}\right) \beta \varepsilon \gamma \sigma}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)(-\mu_2 - \beta + \mu_4 + \gamma)(-\mu_2 - \beta + \mu_5 + \sigma)(-\mu_2 - \beta + \mu_6)} - \\
& \left. \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\varepsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\varepsilon)} - \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)}\right) \beta}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)}\right) \varepsilon \gamma \sigma \right) \\
& \frac{\varepsilon \gamma \sigma}{(-\mu_3 - \varepsilon + \mu_4 + \gamma)(-\mu_3 - \varepsilon + \mu_5 + \sigma)(-\mu_3 - \varepsilon + \mu_6)} \\
& - \left(10 - \frac{(R - (\alpha + \mu_1)) \alpha \beta \varepsilon}{(-\alpha - \mu_1)(-\alpha - \mu_1 + \mu_2 + \beta)(-\alpha - \mu_1 + \mu_3 + \varepsilon)(-\alpha - \mu_1 + \mu_4 + \gamma)} \right. \\
& \left. + \frac{\alpha \beta \varepsilon R}{(-\alpha - \mu_1)(\mu_2 + \beta)(\mu_3 + \varepsilon)(\mu_4 + \gamma)} - \frac{\left(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)}\right) \beta \varepsilon}{(-\mu_2 - \beta + \mu_3 + \varepsilon)(-\mu_2 - \beta + \mu_4 + \gamma)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\varepsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\varepsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\varepsilon)} \right) \varepsilon \\
& \frac{\gamma\sigma}{(-\mu_4-\gamma+\mu_5+\sigma)(-\mu_4-\gamma+\mu_6)} - \\
& \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta\varepsilon\gamma}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\varepsilon)(-\alpha-\mu_1+\mu_4+\gamma)(-\alpha-\mu_1+\mu_5+\sigma)} + \right. \\
& \left. \frac{\alpha\beta\varepsilon\gamma R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\varepsilon)(\mu_4+\gamma)(\mu_5+\sigma)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta\varepsilon\gamma}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\varepsilon)(-\mu_2-\beta+\mu_4+\gamma)(-\mu_2-\beta+\mu_5+\sigma)} - \right. \\
& \left. \left(10 - \frac{(R-(\alpha+\mu_1))\alpha\beta}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)(-\alpha-\mu_1+\mu_3+\varepsilon)} + \frac{\alpha\beta R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)(\mu_3+\varepsilon)} - \frac{(20 - \frac{\alpha}{(-\alpha-\mu_1)(-\alpha-\mu_1+\mu_2+\beta)} + \frac{\alpha R}{(-\alpha-\mu_1)(\mu_2+\beta)})\beta}{(-\mu_2-\beta+\mu_3+\varepsilon)} \right) \varepsilon\gamma \right. \\
& \left. \frac{\gamma}{(-\mu_4-\gamma+\mu_5+\sigma)} \right) \frac{\sigma}{(-\mu_5-\sigma+\mu_6)} \Big) e^{-(\mu_6)t} \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

3.4.1 Plot Solusi Analitik

Kurva pertumbuhan populasi disetiap fase pertumbuhan buah kelapa juga dapat diperoleh dari plot solusi analitik. Kurva pertumbuhan populasi di setiap fase pertumbuhan populasi ditampilkan pada Gambar 4.





Gambar 4 : Kurva Pertumbuhan Populasi di Tiap Fase Pertumbuhan Buah Kelapa. (a) merupakan plot persamaan (13), (b) merupakan plot persamaan (14), (c) merupakan plot persamaan (15), (d) merupakan plot persamaan (16), (e) merupakan plot persamaan (17), dan (f) merupakan plot persamaan (18).

3.4.2. Perbandingan Simulasi Model dan Plot Solusi Analitik

Kurva yang dihasilkan dari simulasi model pada Gambar 2 yang menyatakan banyaknya manggar, manggar yang mengalami penyerbukan, cikal bakal, buah kelapa matang awal, buah kelapa matang sedang dan buah kelapa matang penuh, sama dengan plot solusi analitik pada Gambar 4.

IV. KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan maka didapatkan kesimpulan sebagai berikut :

1. Model Dinamik untuk tiap fase pertumbuhan buah kelapa adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= R - \alpha M - \mu_1 M \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \alpha M - \mu_2 P - \beta P \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \beta P - \mu_3 C - \epsilon C \\ \frac{\partial Ma}{\partial t} &= \epsilon C - \mu_4 Ma - \gamma Ma \\ \frac{\partial Ms}{\partial t} &= \gamma Ma - \mu_5 Ms - \sigma Ms \end{aligned}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \sigma Ms - \mu_6 Mp$$

2. Dari model dinamik diperoleh satu titik kritis yang stabil.
3. Telah diperoleh simulasi model dinamik yang memperlihatkan terjaganya produksi buah kelapa disetiap fase pertumbuhan.
4. Telah diperoleh solusi analitik yang diperoleh dengan menentukan solusi persamaan diferensial variabel terpisah dan persamaan diferensial linier orde satu
5. Telah diperoleh plot solusi analitik yang sama dengan simulasi model dinamik

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Amrullah, F, *Kadar Protein dan Calsium (Ca) Pada Ikan Teri Asin Hasil Pengasinan Menggunakan Abu Pelelah Kelapa* (<http://eprints.ums.ac.id/19315/23/> Naskah_Publikasi_Ilmiyah.pdf), Diakses: 09 Februari 2016.
- [2] Fachry, RA, Andre Oktarian dan Wahyu Wijanarko., *Pembuatan Virgin Coconut oil dengan Metode Sentrifugasi* (http://eprints.unsri.ac.id/2317/1/BBTP_20.pdf), Diakses: 13 April 2016.
- [3] Fitriyah, J, *Pasca Panen* (<http://firtiyah.co.id/2012/12/pasca-panen.html>), Diakses: 14 April 2016.
- [4] Muala, *Kajian Perubahan Komponen Fisik dan Kandungan Minyak selama Penyimpanan Buah Kelapa*, Universitas Tadulako, 2010, Palu.
- [5] Rindengan, B., A. Lay dan H. Novarianto, *Karakteristik Daging Buah Kelapa dan Kesesuaiannya dengan Produk* (digilib.litbang.pertanian.co.id), Diakses: 11 April 2016.