Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 16 Nomor 1 Juni 2019 (Halaman 128 - 133)

JIMT Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan

ISSN : 2450 – 766X

DIMENSI PARTISI GRAF *THORN* DARI GRAF RODA W_3 DAN W_4

[1]R. Riza, [2]S. Zayendra, dan [3]A. Mardhaningsih

[1,2,3]Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas
[1]refina.riza@gmail.com

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a connected graph and $S \subseteq V(G)$. For a vertex v ∈ V(G) and an ordered k-partition $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ of $V(G)$, the representation of v with respect to Π is the k-vector $r(v|\Pi = (d(v, S1), d(v, S2), \ldots, d(v, Sk))$, where d(v,$S_i$) denotes the distance between v and S_i. The k-partition Π is said to be resolving if for every two vertices $u, v \in V(G)$, the representation $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$. The minimum k for which there is a resolving k-partition of $V(G)$ is called the partition dimension of G, denoted by $pd(G)$. The wheel graph Wn on $n + 1$ vertices with $V(Wn) = \{v0, v1, \ldots, vn\}$. Let $l_2, l_2, \ldots, l_n$be non-negative integers, $li \geq 1$, for $i \in \{0,1,2, \ldots, n\}$. The thorn graph of the graph W_n, with parameters $l_0, l_1, \ldots, l_n$ is obtained by attaching l_i new vertices of degree one to the vertex v_i of the graph W_n. The thorn graph is denoted by $Th(W_n, l_0, l_1, \ldots, l_n)$. In this paper we give the upper bounds for the partition dimension of W_3 and W_4 denoted by $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3))$ and $pd(Th(W_4, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4))$.

Keywords : Partition Dimension, Resolving Partition, Thorn Graph, Wheel Graph.

ABSTRAK

Misalkan G merupakan suatu graf terhubung dan $S \subseteq V(G)$. Selanjutnya misalkan terdapat sebuah titik $v \in V(G)$. Maka jarak titik v terhadap S didefinisikan sebagai $d(v, S) = min\{d(v, x)|x \in S\}$. Misalkan himpunan titik $V(G)$ dipartisi menjadi beberapa partisi, sebut $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Notasikan Π sebagai suatu himpunan terurut dari k-partisi, tulis $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$. Misalkan terdapat sebuah titik v di G, maka representasi v terhadap Π didefinisikan se- bagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut sebagai partisi penyelesaian. Kardinalitas minimum dari k-partisi penyelesaian terhadap $V(G)$ disebut dengan dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$. Misalkan $l_1, l_2, \ldots, l_n$ adalah bilangan-bilangan bulat positif dan G adalah suatu graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Thorn* dari graf G, dengan parameter $l_1, l_2, \ldots, l_n$ diperoleh dengan menambahkan daun sebanyak l_i ke titik v_i dari graf G untuk $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Graf thorn dari graf G dinotasikan dengan . $Th(G, l_1, l_2, \ldots, l_n)$. Pada kajian ini akan ditentukan dimensi partisi graf thorn dari graf roda W_3 dan W_4 dinotasikan $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3))$ dan $pd(Th(W_4, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4))$.

Kata Kunci : Dimensi Partisi, Partisi Penyelesaian, Graf *Thorn*, Graf Roda.

I. PENDAHULUAN

Suatu graf G merupakan pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dari titik-titik pada graf G dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik di G. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Graf G dapat ditulis sebagai $G = (V, E)$.

Partisi dari suatu himpunan titik $V(G)$ adalah himpunan bagian tak kosong sedemikan sehingga $V_1(G) \cup V_2(G) \cup V_3(G) \cup \ldots = V(G)$ dan $V_i(G) \cap V_j(G) = \emptyset$, dimana $i \neq j$. Misalkan G merupakan suatu graf terhubung dan $S \subseteq V(G)$. Selanjutnya misalkan terdapat sebuah titik $v \in V(G)$. Maka jarak titik v terhadap S didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$. Misalkan himpunan titik $V(G)$ dipartisi menjadi beberapa partisi, sebut $S_1, S_2, \ldots, S_K$. Notasikan Π sebagai suatu himpunan terurut dari k-partisi, tulis $\Pi = S_1, S_2, \ldots, S_K$. Misalkan terdapat sebuah titik v di G, maka representasi v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut sebagai partisi penyelesaian. Kardinalitas minimum dari k-partisi penyelesaian terhadap $V(G)$ disebut dengan dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$.

Lema 1. [2] Misalkan Π adalah partisi penyelesaian dari $V(G)$ dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua titik-titik $w \in V(G) \backslash \{u, v\}$ maka u dan v termasuk pada kelas berbeda dari Π.

II. METODE PENELITIAN

Metode Penelitian pada kajian ini adalah studi literatur dan mengumpulkan referensi yang relavan sebagi sumber utama. Memahami definisi terminologi dalam teori graf dan dimensi partisi dari graf. Menentukan dimensi partisi dari graf thorn graf roda W_3 dan W_4. Menyimpulkan hasil yang diperoleh dari penentuan dimensi partisi dari graf thorn graf roda W_3 dan W_4.

III. HASIL

Misal diberikan suatu graf roda W_n dengan $(V(W_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n$ dengan $n \geq 3$. Untuk mengkonstruksi graf *thorn* dari graf roda W_n, dinotasikan $Th(W_n, l_0, l_1, \ldots, l_n)$ dengan parameter $l_0, l_1, \ldots, l_n$, yaitu dengan menambahkan daun sebanyak l_i ke titik l_j dari graf W_n untuk $i \in \{0,1, \ldots, n\}$ dimana l_i adalah bilangan-bilangan bulat positif. Jadi

$$V(Th(W_n, l_0, l_1, \ldots, l_n) = \{v_i | i = 0,1, \ldots, n\} \cup \{v_{ij} | 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l_i\}$$

$$E(Th(W_n, l_0, l_1, \ldots, l_n) = \{v_0 v_i | 0 \leq i \leq n\} \cup \{v_j v_{j+1} | 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$$
$$\cup \{v_k v_{kt} | o \leq k \leq ,1 \leq t \leq l_t\}$$

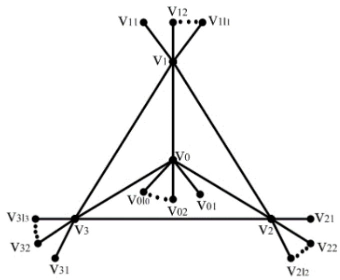
Karena $|V(W_n)| = n+1$ dan $|E(W_n)| = 2n$ serta penambahan daun sebanyak l_i ke titik v_i dari graf W_n maka

$$V(Th(W_n, l_0, l_1, \dots, l_n) = (n+1) + \sum_{i=0}^{n} l_i$$

$$E(Th(W_n, l_0, l_1, \dots, l_n) = 2n + \sum_{i=0}^{n} l_i$$

Teorema 1. Misalkan $Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)$ adalah graf *thorn* dari graf roda W_3 dengan l_i adalah bilangan-bilangan bulat positif untuk $i \in \{0,1,2,3\}$. Notasikan l_{max} adalah maksimum dari l_i. Dimensi partisi graf $Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)$ adalah sebagai berikut:

$$pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) = \begin{cases} 4, \; untuk \; l_{max} = 1, 2, 3 \; atau \; 4, \\ l_{max}, \; untuk \; l_{max} \geq 5. \end{cases}$$



Gambar 1: Graf $Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)$

Bukti. Misalkan $Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)$ adalah graf thorn dari graf roda W_3, dengan l_i adalah bilangan-bilangan bulat positif untuk $i \in \{0,1,2,3\}$. Akan dibuktikan dimensi partisi dari graf $Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)$ adalah sebagai berikut :

Kasus 1. Akan ditunjukkan bahwa $(pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) = 4$, untuk $l_{max} = 1,2,3 \; atau \; 4$. Karena $Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3) = P_n$, maka $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3) > 2$. Jika $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3) = 3$, maka akan ditemukan sedikitnya dua titik di W_3 dengan representasi yang sama. Jadi haruslah setiap titik di W_3 berada di partisi yang berbeda. Untuk itu, setidaknya ada empat partisi sehingga $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3) \geq 4$.

Kemudian akan ditunjukkan $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3) \leq 4$. Misalkan dikonstruksi partisi penyelesaian dari graf $Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)$ adalah $\Pi = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$, terdapat $S_i = \{v_i, v_{k(i+1)} | 0 \leq k \leq 3, untuk \; suatu \; k(i+1)\}$ dimana $0 \leq i \leq 3$. Misalkan $S_0 = \{v_0, v_{01}, \dots, v_{31}\}$. Setiap titik yang berada di partisi yang berbeda akan mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Misalkan titik v_{01} dan v_{02}, karena $(v_{01}, S_0) = d(v_{02}, S_0)$ maka $r(v_{01}|\Pi) = r(v_{02}|\Pi)$. Kemudian perhatikan titik yang berada di partisi yang sama, misalkan v_0 dan v_{01}, karena $(v_{01}, S_1) = d(v_0, S_1) + 1$, maka $r(v_{01}|\Pi) = r(v_0|\Pi)$. Dengan cara yang sama diperoleh representasi dari setiap titik berbeda terhadap Π, sehingga $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) \leq 4$. Karena $(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) \geq 4$, $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3) \leq 4$, maka diperoleh $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3) = 4$.

Kasus 2. Akan ditunjukkan bahwa $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) = l_{max}$, untuk $l_{max} \geq 5$. Setiap daun di titik $v_{l_{max}}$ harus berada di partisi yang berbeda, karena jika tidak maka akan terdapat minimal dua titik yang mempunyai represen- tasi yang sama terhadap Π. Untuk itu, setidaknya ada l_{max} partisi, sehingga $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3) \geq l_{max}$.

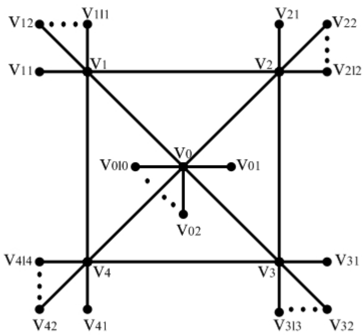
Kemudian akan ditunjukkan $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) \leq l_{max}$. Misalkan dikonstruksi partisi penyelesaian dari graf $Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)$ adalah $\Pi = \{S_0, S_1, \ldots, Sl_{max-1}\}$, terdapat:

$S_i = \{v_i, v_{k(i+1)} | 0 \leq k \leq 3, untuk\ suatu\ k(i+1)\}$ dimana $0 \leq i \leq 3$,
$S_t = \{v_{0(t+1)}, v_{1(t+1)}, v_{2(t+1)}, v_{3(t+1)} | 4 \leq t \leq l_{max} - 1\}$ untuk suatu t.

Misalkan $S_0 = \{v_0, v_{01}, \ldots, v_{31}\}$ Karena setiap titik berada di partisi yang berbeda maka representasi titik tersebut terhadap Π akan berbeda. Misalkan terdapat titik $v_{01}, v_{02}, \ldots, v_{1l_{max}}$ maka $(v_{01}, S_0) = d(v_{1l_{max}}, S_0)$ sehingga $r(v_{01}|\Pi) = r(v_{1l_{max}}|\Pi)$. Dengan cara yang sama diperoleh representasi dari setiap titik berbeda terhadap Π, sehingga $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) \leq l_{max}$.
Karena $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) \geq l_{max}$ dan $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) \leq l_{max}$, dengan demikian $pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) = l_{max}$. ■

Teorema 2. Misalkan $Th(W_4, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)$ adalah graf thorn dari graf roda W_4 dengan l_i adalah bilangan-bilangan bulat positif untuk $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Notasikan l_{max} adalah maksimum dari l_i, v_{lmax} adalah titik dengan l_{max}, dan $|v_{l_{max}}|$ adalah banyaknya titik $v_{l_{max}}$. Maka dimensi partisi graf $Th(W_4, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)$ ditunjukkan pada Gambar 2.

$$pd(Th(W_4, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)) = \begin{cases} 3, \; untuk \; l_{max} = 1 \; atau \; 2, \; |v_{lmax}| = 1, 2, 3, 4 \; atau \; 5, \\ \quad untuk \; l_{max} = 3, \; |v_{lmax}| = 1 \; dan \; v_{lmax} = v_0, \\ 4, \; untuk \; l_{max} = 3, \; |v_{lmax}| = 1 \; dan \; v_{lmax} \neq v_0, \\ \quad untuk \; l_{max} = 3, \; |v_{lmax}| = 2, 3, 4, \; atau \; 5, \\ \quad untuk \; l_{max} = 4, \; |v_{lmax}| = 1, 2, 3 \; atau \; 4, \\ 5, \; untuk \; l_{max} = 4, \; |v_{lmax}| = 4 \; dan \; v_{lmax} \neq v_0, \\ \quad untuk \; l_{max} = 4, \; |v_{lmax}| = 5, \\ l_{max}, \; untuk \; l_{max} \geq 5. \end{cases}$$



Gambar 2: Graf $Th(W_4, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)$

Bukti : Dengan cara yang sama seperti Kasus 1 pada Teorema 1.

IV. KESIMPULAN

Pada kajian ini telah diperoleh dimensi partisi graf *thorn* dari graf roda W_3 adalah

$$pd(Th(W_3, l_0, l_1, l_2, l_3)) = \begin{cases} 4, \ untuk \ l_{max} = 1, 2, 3 \ atau \ 4, \\ l_{max}, \ untuk \ l_{max} \geq 5. \end{cases}$$

Dan diperoleh dimensi partisi graf *thorn* dari graf roda W_4 sebagai berikut :

$$pd(Th(W_4, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)) = \begin{cases} 3, \ untuk \ l_{max} = 1 \ atau \ 2, \ |v_{lmax}| = 1, 2, 3, 4 \ atau \ 5, \\ \quad untuk \ l_{max} = 3, \ |v_{lmax}| = 1 \ dan \ v_{lmax} = v_0, \\ 4, \ untuk \ l_{max} = 3, \ |v_{lmax}| = 1 \ dan \ v_{lmax} \neq v_0, \\ \quad untuk \ l_{max} = 3, \ |v_{lmax}| = 2, 3, 4, \ atau \ 5, \\ \quad untuk \ l_{max} = 4, \ |v_{lmax}| = 1, 2, 3 \ atau \ 4, \\ 5, \ untuk \ l_{max} = 4, \ |v_{lmax}| = 4 \ dan \ v_{lmax} \neq v_0, \\ \quad untuk \ l_{max} = 4, \ |v_{lmax}| = 5, \\ l_{max}, \ untuk \ l_{max} \geq 5. \end{cases}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bondy, J. A dan U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Macmillan, 1976, London.

[2] Chartrand, G., E. Salehi dan P. Zhang, *The Partition Dimension Of A Graph*, Aequationes Mathematicae, 2000, 59: 45-54.

[3] Darmaji, *Dimensi Partisi Gaf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Buah Graf Terhubung*, Disertasi Program Studi Doktor Matematika ITB, 2011, tidak diterbitkan, [4] Gutman, I, *Distance In Thorny Graphs*. Publ. Inst. Math.(Beograd), 1998, 63:31-36.

[4] Javaid, I. dan Shokat S, *On The Partition Dimension Of Some Whell Related Graphs*, Prime Research in Mathematics, 2008, 4: 154-164.

[5] Tomescu, I., I. Javaid dan Slamin, *On The Partition Dimension And Connected Partition Dimension Of Whell*. Ars Combin, 2007, 84: 311-317.