PERAN PENTING LAJU PERUBAHAN KALOR PADA MODEL DINAMIK UNSUR–UNSUR UTAMA IKLIM

A.I. Jaya[1]

[1]Jurusan Matematika FMIPA UNTAD Kampus BumiTadulakoTondo Palu

Abstrak

Model dinamik interkasi unsur – unsure utama iklim, yaitu suhu dan tekanan udara, memunculkan parameter laju perubahan kalor di dalamnya. Pengamatan terhadap kestabilan system yang merepresentasikannya selama ini dilakukan dengan mengamat inilai eigen matriks linearisasi yang mewakilinya. Penelitian ini menunjukkan bahwa pengamatan kestabilan system di sekitar titik kritis dapat dilakukan dengan mengamati nilai parameter tersebut. Bila parameter laju perubahan kalor bernilai positif maka system aka tidak stabil di sekitar titik kritisnya.Upaya pengendalian system dapat dilakukan dengan menjaga nilai parameter laju perubahan kalor bernilai negative. Hal ini menginterpretasikan bahwa energy pelepasan kalor dalam system haruslah direduksi untuk menghindari kestabilan system.

Kata kunci :*Matriks Linearisasi, Model Dinamik, Nilai Eigen, Parameter*

I. Pendahuluan

Fenomena pemanasan permukaan bumi akibat gas CO_2 yang berdampak pada perubahan iklim memerlukan kajian lebih lanjut terhadap peran laju perubahan panas pada model interaksi unsur– unsure utama iklim. Model tersebut telah dibangun dalam Sarvina (2009) dengan melakukan kajian termodinamika terhadap suhu dan tekanan udara permukaan sebagai unsur–unsure utama iklim. Dalam udara kering, keadaan termodinamika di suatu titik ditentukan oleh nilai tekanan, suhu dan densitasnya (Kato dkk, 1998). Interaksi dinamis antara suhu dan tekanan udara inilah yang menjadi kajian utama dalam model dengan meninjau perilaku gas CO_2 di atmosfer sebagai efek rumah kaca.

Model dinamik suhu dan tekanan udara dibangunoleh system persamaan diferensial yang almost linear. Analisis kestabilan pada titik–titik kritis model tersebut, yang dilakukan dengan menggunakan metode linearisasi, menujukkan bahwa perilaku system adalah tidaks tabil. Hal ini menujukkan bahwa pola perubahan kondisi iklim akan terjadi secara signifikan. Menarik untuk dikaji bahwa posisi titik–titik kritis system dipengaruhi oleh nilai parameter laju perubahan panas.

Peran parameter laju perubahan panas tersebut dapat dikaji lebih jauh dengan melakukan identifikasi perilaku pelepasan panas seiring dengan perubahan waktu. Identifikasi dilakukan dengan mengamati perilaku kestabilan system melalui nilai eigen system yang mewakilinya. Kriteria kestabilan berdasarkan nilai eigen inilah yang memungkinkan kita untuk menurunkan solusi persamaan diferensial biasa yang dibangun oleh interaksi parameter laju perubahan panas dan akselerasinya signifikan.

II. MetodaPenelitian

Peran laju perubahan panas pada model dinamik unsur– unsure utama iklim dikaji secara kualitatif dengan prosedur penelitian sebagai berikut :

1. Menurunkan model dinamik unsur–unsure utama iklim berdasarkan hukum termodenamika
2. Menentukan titik kritis model yang diperoleh pada langkah 1.
3. Melakukan linearisasi model di sekitar titik–titik kritis.
4. Menentukan nilai eigen dari matriks linearisasi
5. Menentukan persamaan diferensial yang dibangun oleh criteria kestabilan system di sekitar titik kritis.
6. Menentukan solusi persamaan diferensial yang diperoleh pada langkah 5.
7. Mengakaji peran laju perubahan panas pada model melalui solusi persamaan diferensial yang diperoleh pada langkah 6.

III. Pembahasan

III.1 Model Dinamik Unsur– Unsur Utama Iklim

Hubungan unsur–unsur utama iklim dinyatakan dalam persamaan gas ideal berikut :

$$p = \rho RT \qquad (1)$$

$$p\alpha = RT \qquad (2)$$

dimana *T* adalah suhu (dalam K), *p* adalah tekanan (dalam atm), ρ adalah densitas (dalam kg/L) dan α adalah volume spesifik gas (dalam L). Persamaan keadaan ini sering digunakan untuk menurunkan persamaan lain yang menggambarkan dinamika unsur–unsur utama iklim.

Selain kedua persamaan gas ideal, dikenal pula persamaan energy termodinamika yang pada umumnya dikenal sebagai panas berikut:

$$C_v \frac{dT}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt} = \dot{q} \qquad (3)$$

Dimana C_v adalah kapasitas panas pada volume tetap persatuan volume. Adapun turunan total dari persamaan (2) dapat diperoleh sebagai berikut :

$$p\frac{d\alpha}{dt} + \alpha\frac{dp}{dt} = R\frac{dT}{dt} \qquad (4)$$

Dengan asumsi $C_p = C_v + R$, melalui persamaan (4) dan persamaan (3) kita bias mendapatkan persamaan berikut :

$$C_p\frac{dT}{dt} - \alpha\frac{dp}{dt} = \dot{q} \qquad (5)$$

Dimana C_p adalah kapasitas panas pada tekanan tetap. Operasi matematika sederhana pada persamaaan (5) memberikan kita persamaan–persamaan berikut:

$$\frac{d\ lnT}{dt} - K\frac{dp}{dt} = \frac{\dot{q}}{C_pT} \qquad (6)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\dot{q}}{(1-R)C_p} - \frac{R\ p\ d\frac{T}{p}}{1-R\ dT} \qquad (7)$$

Secara termodinamik keadaan *T* sebanding dengan *p* dan dapat dinyatakan hubungannya dengan konstanta sebarang. Mengingat CO_2 memberi pengaruh secara langsung pada fluktuasi tekanan udara permukaan, secara matematis dapat dibangun hubungan antara suhu dan tekanan udara sebagai berikut :

$$T = xp \qquad (8)$$

Dengan *x* sebagai konsentrasi gas CO_2. Melaui persamaan (8), kita dapat melakukan operasi matematika sederhana pada persamaan (5) sehingga diperoleh persamaan berikut :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{x}{(C_p x - \alpha)}\left(q - \frac{\alpha \dot{x}}{x^2} T\right) \qquad (9)$$

Dimana $\dot{x}$ merupakan perubahan konsentrasi gas CO_2 terhadap perubahan waktu *t*. Manipulasi $\dot{x}$ pada persamaan (9) akan memberikan :

$$C_p T \acute{T} - \alpha T \acute{p} = Tq \qquad (10)$$

Persamaan (6) dapat pula dinyatakan sebagai persamaan berikut :

$$C_p K \acute{T} - [C_p - \dot{q}]\acute{p} = -p\ddot{q} \qquad (11)$$

Persamaan (10 dan persamaan (11) dapat dinyatakan sebagai system persamaan yang dapat ditentukan penyelesaiannya dengan aturan cramer sehinga diperoleh model pembangun berikut :

$$\acute{T} = \frac{\begin{vmatrix} -p\ddot{q} & -[C_p - \dot{q}] \\ T\ddot{q} & -\alpha T \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_p K & -[C_p - \dot{q}] \\ C_p T & -\alpha T \end{vmatrix}} = \frac{\dot{q}[\alpha p \dot{q} + C_p - T\dot{q}]}{C_p[C_p - K\alpha - \dot{q}]} \qquad (12)$$

$$\acute{p} = \frac{\begin{vmatrix} C_p K & p\ddot{q} \\ C_p T & T\dot{q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_p K & -[C_p - \dot{q}] \\ C_p T & -\alpha T \end{vmatrix}} = \frac{\dot{q}[K - p\dot{q}]}{[C_p - K\alpha - \dot{q}]} \qquad (13)$$

Persamaan (12) dan (3) inilah yang merupakan persamaan pembangun dari model dinamik unsur–unsur utama iklim.

III.2 Titik–Titik Kritis Model Dinamik Unsur – Unsur Utama Iklim

Analisis kualitatif terhadap model dinamik yang direpresentasikan oleh pesamaan (12) dan (13) untuk kondisi zero growth perubahan nilai unsur–unsur utama pembentuk iklim sehingga diperoleh :

$$\alpha p \dot{q} + C_p - T\dot{q} = 0 \qquad (14)$$

$$K - p\dot{q} = 0 \qquad (15)$$

Dari persamaan (14) dapat diketahui bahwa jika *T* = 0, maka $p = -\frac{C_p}{\alpha \dot{q}}$ dan jika p = 0 maka $= \frac{C_p}{\dot{q}}$. Adapun substitusi persamaan (15) ke persamaan (14) memberikan $T = \frac{C_p - K\alpha}{\dot{q}}$. Dengan demikian titik – titik kritis model dinamik unsur – unsur utama iklim adalah $\left(0, -\frac{C_p}{\alpha \dot{q}}\right), \left(\frac{C_p}{\dot{q}}, 0\right)$ dan $\left(\frac{C_p - K\alpha}{\dot{q}}, -\frac{K}{\dot{q}}\right)$.

III.3 Linearisasi Model DinamikUnsur – UnsurUtamaIkliqm

Analisa kestabilan system dilakukan disekitar titik – titik kritis sehingga interaksi unsur utama iklim *T* dan *P* dapat diamati. Misalkan system yang direpresentasikan oleh persamaan (12) dan (13) dinyatakan sebagai :

$$\acute{T} = F(T, p), \ \acute{p} = G(T, p) \qquad (16)$$

Mengingat system yang direpresentasikan oleh persamaan (16) adalah almost linier maka system linear yang dapat mengaproksimasinya di sekitar titik kritis $(\overline{T,p})$ diberikan oleh :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_T(\bar{T},\bar{p}) & F_p(\bar{T},\bar{p})\\ G_T(\bar{T},\bar{p}) & G_p(\bar{T},\bar{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \qquad (17)$$

Dimana $u_1 = T - \bar{T}$ dan $u_1 = p - \bar{p}$. Melalui transformasi ini kestabilan system dapat diamati dalam koordinat variable transformasi yang baru.

Persamaan (17) dapat ditentukan dengan menentukan turunan–turunan parsial yang bersesuaian pada persamaan (12) dan (13) sehingga diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\ddot{q}}{C_p(C_p - K\alpha - \dot{q})} & \frac{\alpha\,\ddot{q}}{(C_p - K\alpha - \dot{q})}\\ 0 & \frac{\ddot{q}}{(C_p - K\alpha - \dot{q})}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \qquad (18)$$

Persamaan (18) dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks dan vektor $\acute{U} = AU$ dengan $A = \begin{pmatrix}-\frac{\ddot{q}}{C_p(C_p - K\alpha - \dot{q})} & \frac{\alpha\ddot{q}}{(C_p - K\alpha - \dot{q})}\\ 0 & \frac{\ddot{q}}{(C_p - K\alpha - \dot{q})}\end{pmatrix}$ dan $U = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$.

Matriks A disebut sebagai matriks linearisasi system di sekitar titik kritis.

III.4 Nilai Eigen Matriks Linearisasi

Untuk mengetahui stabilitas system yang direpresentasikan oleh persamaan (18) akan ditentukan nilai eigen λ dari matriks linearisasi system di sekitar titik kritis dengan menentukan nilai determinan dari matriks (*A* - λ *I*) yang sama dengan nol. Nilai – nilai λ yang memenuhi persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk faktorisasi berikut :

$$\left(-\frac{\ddot{q}}{C_p(C_p - K\alpha - \dot{q})} - \lambda\right)\left(\frac{\ddot{q}}{C_p - K\alpha - \dot{q}} - \lambda\right) = 0 \qquad (19)$$

Perhatikan bahwa dapat nilai eigen λ yang diperoleh sebagai akar – akar dari persamaan (19) dapat dipandang sebagai persamaan diferensial biasa orde dua dalam variabel pelepasan kalor *q* berikut:

$$\ddot{q} - \lambda C_p\dot{q} + \lambda C_p(C_p - K\alpha) = 0 \qquad (20)$$

III.5 Kriteria Kestabilan Sistem

Pengamatan terhadap kestabilan sistem di sekitar titik kritis diamati melalui nilai eigen λ dari matriks Jacobi *J(x)* sebagai berikut :

1. Nilai eigen real $(\theta^2 > 4\delta)$:
   a. Kedua nilai eigen positif, $\theta > 0$ dan $\delta > 0$, menghasilkan trayektori simpul tak stabill (*unstable node*)
   b. Nilai eigen satu positif dan yang lainnya negatif, $\delta < 0$, menghasilkan trayektori titik pelana (*saddle point*)
   c. Kedua nilai eigen negatif, $\theta < 0$ dan $\delta < 0$, menghasilkan trayektori simpul stabill (*stable node*)
2. Nilai eigen kompeks $(\theta^2 < 4\delta, \delta > 0)$:

a. Bagian real positif, $r > 0,\ \theta > 0$ dan $\theta^2 < 4\delta$, menghasilkan trayektori spiral tak stabill (*unstable spiral point*)

b. Bagian real nol, $r = 0$ semua nilai eigen imajiner, $\theta = 0,\ \theta^2 < 4\delta$, menghasilkan trayektori pusat netral atau stabil netral (*neutral center* atau *neutral stable*)

c. Bagian real negatif, $r < 0,\ \theta < 0$ dan $\theta^2 < 4\delta$, menghasilkan trayektori spiral stabil (*stable spiral point*)

dimana θ , δ dan r secara berturut-turut adalah trace, determinan dan bagian real nilai eigen matriks Jacobi *J(x)*. dari sistem .

III.6 PeranPentingLajuPerubahanKalor

Peran penting laju perubahan kalor $\dot{q}$ pengamatan terhadap dapat ditunjukkan melalui pengamatan terhadap solusi persamaan (20). Solusi umum persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai :

$$q(t) = C_1 + C_2 e^{\lambda C_p t} \qquad (21)$$

Persamaan (21) menunjukkan peran penting laju perubahan kalor $\dot{q}$ sebagai penentu kestabilan system. Hal ini dilakukan dengan meninjau :

$$\dot{q}(t) = \lambda e^{\lambda C_p t} \qquad (21)$$

Mengingat fungsi eksponensial selalu bernilai positif, maka persamaan (21) memperlihatkan bahwa nilai eigen system, yang merupakan indicator penentu kestabilan system, sangat ditentukan oleh nilai laju perubahan kalor $\dot{q}$. Bila energy pelepasan kalor terus meningkat yang berarti laju perubahan kalor bernilai positif maka system akan tidak stabil di sekitar titik kritisnya. Dengan demikian bila system ingin dijaga kestabilannya di sekitar titik kritis maka laju perubahan kalor harus diupayakan agar tetap bernilai negative.

IV. Kesimpulan

Model interaksi unsur – unsur utama iklim, yang dibangun berdasarkan kaidah termodinamik dan direpresentasikan sebagai system persamaan diferensial, menunjukkaan bahwa perilaku system di sekitar titik kritis adalah tidak stabil. Untuk system yang diobservasi dalam penelitian, diperoleh cara baru dalam pengamatan kestabilan system, yaitu dengan mengamati laju perubahan kalor. Pengamatan kestabilan system yang selama ini secara teknis diukur melalui nilai eigen matriks linearisasi yang mewakilinya, dapat dikaitkan dengan pengamatan terhadap nilai laju perubahan kalorter sebut.

V. DaftarPustaka

1. Boyce, W. E., and Richard, C. D, 1996, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Sixth Edition, Wiley, Singapore.
2. Gabriel, J. F., 2001, *Fisika Lingkungan*, Penerbit Hipokrates, Jakarta.
3. Haneda, 2004, *Hubungan Efek Rumah Kaca, Pemanasan Global dan Perubahan Iklim*, http://climatechange.menlh.go.id., diakses 11 Nopember 2008.
4. Kato, S, Tri W. H. danJoko W., 1998, *Dinamika Atmosfer*, Penerbit ITB, Bandung.

5. Leon, S.J., 2001, *Aljabar Linier dan Aplikasinya*, Edisi5, (Terjemahan), Penerbit Erlangga, Jakarta.
6. Mudiyarso, D., *Konvensi Perubahan Iklim*, Penerbit Buku Kompas, Jakarta.
7. Sarvina, Iin, 2009, *Model Dinamik Suhudan Tekanan Udara Permukaan dengan Meninjau Perilaku Gas CO2ndi Atmosfer sebagai Efek Gas RumahKaca*, UniversitasTadulako, Palu.
8. Tjasyono, B., 2004, *Klimatologi*, Penerbit ITB, Bandung.
9. Wikipedia Bahasa Indonesia Ensiklopedia Bebas, 2008, *Pemanasan Global*, http://id.wikipedia.org/wiki/Pemanasan_global, diakses 7 September 2008.