Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 15 Nomor 2 Desember 2018 (Halaman 280 - 287)

ISSN : 2450 – 766X

KONDISI MINIMAL IDEAL KIRI TERURUT PADA SEMIGRUP TERNER TERURUT PARSIAL

Andri[1], N. Nacong[2]

[1,2]Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako
Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia
[1]andrizheva@yahoo.com, [2]nasrianacong@gmail.com

ABSTRACT

Ternary semigroups T is obtained from a nonempty set T that given a mapping with a multiplication operation ternary that satisfied closed and associative properties. So, generally a ternary semigroup is an abstraction of a semigroup structure. Meanwhile, partially ordered ternary semigroups T is an ordered semigroup T that satisfies the properties for each $a, b, c, d \in T$ if $a \leq b$ then $(acd) \leq (bcd)$ and $(dca) \leq (dcb)$. In a ternary semigroups there is also concept of left ideals. This study was conducted to examine the characteristics of ordered left ideals on partially ordered ternary semigroups. Furthermore, it will be discussed about the characteristics of minimal ordered left ideals on partially ordered semigroups.

Keywords : Ternary Semigroups, Ordered Ternary Semigroups, Left Ideals, Ordered Left Ideals, Minimal of Ordered Left Ideals.

ABSTRAK

Semigrup terner T diperoleh dari suatu himpunan tak kosong T yang diberikan suatu pemetaan dengan operasi pergandaan terner yang memenuhi sifat tertutup dan assosiatif. Jadi, secara umum semigrup terner merupakan abstraksi dari struktur semigrup. Sedangkan, semigrup terner T terurut parsial adalah suatu semigrup terner T terurut yang memenuhi sifat untuk setiap $a, b, c, d \in T$ jika $a \leq b$ maka berlaku $(acd) \leq (bcd)$ dan $(dca) \leq (dcb)$. Dalam semigrup terner terdapat juga konsep ideal kiri. Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji karakteristik ideal kiri terurut pada semigrup terner terurut parsial. Lebih lanjut, akan dibahas mengenai karakteristik minimal ideal kiri terurut pada semigrup terner terurut parsial.

Kata Kunci : Semigrup Terner, Semigrup Terner Terurut, Ideal Kiri, Ideal Kiri Terurut, Minimal Ideal Kiri Terurut.

I. PENDAHULUAN

Dalam salah satu klasikasi aljabar yaitu aljabar abstrak, dipelajari struktur aljabar seperti grup yang didenisikan dan diajarkan secara aksiomatis. Seiring berjalannya waktu, struktur grup terus mengalami perkembangan. Terlihat ketika beberapa aksioma lain yaitu eksistensi elemen invers dan elemen identitas dilepas dari aksioma pembentukan struktur grup, hal ini memunculkan struktur aljabar baru yang disebut semigrup dan pertama kali dikemukakan oleh Howie [5] dalam bukunya yang berjudul *Fundamentals of Semigroup Theory* yang diikuti oleh para matematikawan lainnya seperti Clifford dan Preston dalam bukunya yang berjudul *The Algebraic of Theory Semigroup* pada tahun 1961 [3]. Jadi, semigrup merupakan suatu himpunan yang tidak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang bersifat assosiatif. Oleh karena itu, pada dasarnya semigrup merupakan generalisasi atau perumuman dari grup.

Kemudian dengan berbagai penelitian yang dilakukan oleh para matematikawan, dikembangkan suatu abstraksi baru dari struktur semigrup yang disebut dengan semigrup terner dan pertama kali diperkenalkan oleh Lehmer [6]. Semigrup terner ini dibentuk dengan memberikan suatu operasi terner terhadap himpunan tak kosong T sehingga pemetaan yang terjadi ialah $T \times T \times T \to T$. Jadi, perbedaan dengan semigrup ialah terdapat pada pemetaan yang diberikan. Sedangkan, persamaannya yaitu baik pada semigrup maupun semigrup terner sama-sama mempunyai sifat assosiatif dari operasinya. Seperti halnya semigrup, pada semigrup terner juga masih ditemukan konsep mengenai semigrup terner komutatif, subsemigrup terner, serta ideal kiri.

II. METODE PENELITIAN

Jika dalam struktur semigrup terner T diberikan suatu relasi ”$\leq$” sedemikian sehingga $(T, \leq)$ merupakan relasi urutan parsial maka dengan definisi untuk setiap elemen di T yakni $x_1, x_2, x_3, x_4 \in T$ dengan $x_1 \leq x_2$ maka berlaku $(x_1x_3x_4) \leq (x_2x_3x_4)$ dan $(x_4x_3x_1) \leq (x_4x_3x_2)$ struktur $(T, \leq)$ ini disebut dengan semigrup terner terurut parsial, yang selanjutnya akan ditulis po-semigrup terner T. Kemudian, pada tahun 1995 Dixit dan Dewan [4] telah memberikan definisi dan karakteristik dari ideal kiri semigrup terner. Pada tahun 2000 peneliti Cao dan Xu [2] telah memberikan karakteristis mengenai minimal ideal kiri pada semigrup terurut. Selanjutnya, penelitian terbaru pada tahun 2014 oleh Bindu, Sarala, dan Madhusudhana [1] berhasil memberikan karakteristik dari maksimal ideal kiri pada semigrup terner terurut.

Definisi 1.1. Diberikan himpunan tak kosong S dan operasi biner “$*$” pada S. Pasangan S dan “$*$”, dinotasikan dengan $(S,*)$ disebut semigrup jika operasi biner “$*$” bersifat asosiatif yaitu $(x * y) * z = x * (y * z)$ untuk sebarang $x, y, z \in S$.

Definisi 1.2. Himpunan tidak kosong T disebut semigrup terner jika terdapat pemetaan $T \times T \times T \to T$ dengan $(a, b, c) \mapsto (a \cdot b \cdot c)$ yang memenuhi $(a \cdot b \cdot c) \cdot d \cdot e = a \cdot b \cdot (c \cdot d \cdot e)$ untuk setiap $a, b, c, d, e \in T$.

Seperti halnya dalam struktur semigrup, pada semigrup terner juga mempunyai struktur subsemigrup terner. Berikut diberikan definisi dan teorema mengenai subsemigrup terner.

Definisi 1.3. Diketahui T semigrup terner. Suatu himpunan $A \subseteq T$ yang tidak kosong disebut subsemigrup terner T jika $abc \in A$, untuk semua $a, b, c \in A$.

Jika suatu himpunan $A \subseteq T$ semigrup terner, maka A merupakan subsemigrup terner T jika $AAA \subseteq A$.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Ideal Kiri Semigrup Terner

Definisi 2.1. Diketahui T semigrup terner. Suatu himpunan $L \subseteq T$ yang tidak kosong disebut ideal kiri T jika untuk setiap $a, b \in T$ dan $x \in L$ maka $abx \in L$.

Berikut diberikan karakteristik dari irisan dan gabungan semua keluarga ideal kiri pada sebarang semigrup terner.

Teorema 2.2. Diketahui T semigrup terner. Irisan tidak kosong dari sebarang keluarga ideal kiri di T merupakan ideal kiri di T.

Teorema 2.3. Diketahui T semigrup terner. Gabungan dari sebarang keluarga ideal kiri di T merupakan ideal kiri di T.

Suatu ideal kiri terurut L atas T dikatakan sejati jika $L \neq T$. Irisan semua ideal kiri terurut dari suatu subsemigrup terner K atas T memuat suatu subhimpunan tak kosong A atas K merupakan ideal kiri terurut K yang dibangun oleh A. Untuk $A = \{a\}$, di misalkan $L_K(a)$ notasi dari ideal kiri terurut atas K yang dibangun oleh a. Jika $K = T$, maka $L_T(a)$ dapat dianggap sebagai $L(a)$.

Seperti halnya pada semigrup, dalam semigrup terner juga dikenal suatu simple kiri. Berikut diberikan definisi semigrup terner simple kiri.

Definisi 2.4. Semigrup terner T tanpa nol disebut simple kiri jika T tidak mempunyai ideal kiri sejati. Semigrup terner T dengan nol disebut 0-simple kiri jika T tidak mempunyai ideal kiri tak nol yang sejati dan $[TTT] \neq \{0\}$.

3.2. Ideal Kiri Terurut pada Semigrup Terner Terurut

Definisi 3.1. Diberikan himpunan terurut parsial T yang merupakan semigrup terner. Himpunan T disebut semigrup terner terurut parsial jika untuk setiap $a, b, c, d \in T$,

$$a \leq b \text{ berlaku } acd \leq bcd \text{ dan } dca \leq dcb$$

Jika $g \neq I \subseteq T$ ideal kiri dari semigrup terner T, maka I merupakan ideal kiri terurut jika diberikan tambahan syarat relasi terurut parsial di dalamnya.

Definisi 3.2. Diberikan semigrup terner terurut T. Himpunan $I \subseteq T$ disebut ideal kiri terurut atas T jika $TTI \subseteq I$, dan untuk setiap $a \in I$ dan $b \in T$ dengan $b \leq a$ berakibat $b \in I$.

Berikut hasil yang ditulis dalam lemma mengenai ideal kiri terurut dan simple kiri pada semigrup terner terurut.

Lemma 3.3. Untuk sebarang semigrup terner terurut T dan $a \in T$, berlaku $L(a) = (a \cup TTa] = (a] \cup (TTa]$.

Bukti. Diambil sebarang $s \in T$, $r \in (a \cup TTa]$. Karena $r \in (a \cup TTa]$, berarti $r = a$ atau $r = sta$ untuk suatu $t \in T$. Jika $r = a$, maka $str = sta \in TTa \subseteq (a \cup TTa]$. Jika $r = sta$, maka $str = st(sta) = (sts)ta \in TTa \subseteq (a \cup TTa]$, sehingga $sta \in (a \cup TTa]$ dan berakibat $(a \cup TTa]$ merupakan ideal kiri atas T. Selanjutnya, dimisalkan L ideal kiri T yang memuat a. Diambil sebarang $r \in (a \cup TTa]$, berarti $r = a$ atau $r = sta$ untuk suatu $s, t \in S$. Jika $r = a$, maka $r = a \in L$. Jika $r = sta$, maka $r = sta \in L$, sehingga $(a \cup TTa] \subseteq L$ dan berakibat $(a \cup TTa]$ merupakan ideal kiri terkecil yang memuat a. Jadi, $L(a) = (a \cup TTa]$. Selanjutnya, untuk sebarang $a \in T$ berlaku $(TTa] \subseteq (a \cup TTa]$ atau $(a] \subseteq (a \cup TTa]$. Jadi, $(a] \cup (TTa] \subseteq (a \cup TTa]$. Diambil sebarang $s \in (a \cup TTa]$, berarti $s = a$ atau $s = mna$ untuk suatu $m, n \in T$. Dari sini, diperoleh $s = a \in (a]$ dan $s = mna \in (TTa]$, dengan kata lain $(a \cup TTa] \subseteq (a] \cup (TTa]$, sehingga $(a \cup TTa] = (a] \cup (TTa]$. Jadi $L(a) = (a \cup TTa] = (a] \cup (TTa]$. ■

Lemma 3.4. Diketahui T semigrup terner terurut tanpa nol. Pernyataan berikut ekuivalen.

a) T simple kiri.
b) $(TTa] = T$ untuk semua $a \in T$.
c) $L(a) = T$ untuk semua $a \in T$.

Bukti. $(a) \Rightarrow (b)$ Diketahui T simple kiri. Diambil sebarang $a \in T$, karena T simple kiri berarti $(TTa] = T$ untuk semua $a \in T$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Diketahui $(TTa] = T$. Diambil sebarang $a \in T$, berdasarkan lemma 3.3 diperoleh $L(a) = (a \cup TTa] = (a] \cup (TTa]$. Dari yang diketahui, diperoleh $L(a) = (a] \cup (TTa] = (a] \cup T = T$. Jadi, $L(a) = T$ untuk semua $a \in T$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Diketahui $L(a) = T$ untuk semua $a \in T$. Diambil L ideal kiri terurut atas T dan $a \in L$, akan ditunjukkan $L = T$. Dari hipotesis, $L(a) = T$ sedemikian sehingga $T = L(a) \subseteq L \subseteq T$. Jadi $L = T$ atau dengan kata lain T merupakan simple kiri. ■

Lemma 3.5. Diketahui T semigrup terner terurut dengan nol. Pernyataan berikut berlaku.

a) Jika T 0-simple kiri, maka $L(x) = T$ untuk semua $x \in T \backslash \{0\}$.

b) Jika $L(x) = T$ untuk semua $x \in T \backslash \{0\}$, maka $TTT = \{0\}$ atau T merupakan 0-simple kiri.

Bukti. (a) Diketahui T 0-simple kiri. Diambil sebarang $x \in T \backslash \{0\}$. Diperoleh $L(x)$ merupakan ideal kiri terurut tak nol atas T, jadi $L(x) = T$.

(b) Diketahui $L(x) = T$ untuk semua $x \in T \backslash \{0\}$. Pembuktian ini dibagi atas dua, pertama dimisalkan T bukan 0-simple kiri. Berdasarkan definisi dari 0-simple kiri, berarti $TTT = \{0\}$. Selanjutnya dimisalkan $TTT \neq \{0\}$, diambil sebarang L ideal kiri terurut atas T dan $a \in L \backslash \{0\}$, tinggal ditunjukkan $L = T$. Berdasarkan hipotesis, diperoleh $T = L(a) \subseteq L \subseteq T$, sehingga $L = T$, jadi T merupakan 0-simple kiri. ■

Lemma 3.6. Diketahui T semigrup terner terurut. Diberikan ideal kiri terurut L atas T dan subsemigrup terner K di T. Pernyataan berikut berlaku.

a) Jika K simple kiri sedemikian sehingga $K \cap L \neq g$, maka $K \subseteq L$.

b) Jika K 0-simple kiri sedemikian sehingga $K \backslash \{0\} \cap L \neq g$, maka $K \subseteq L$

Bukti. Diketahui T semigrup terner terurut, L ideal kiri terurut dan K subsemigrup T.

(a) Diketahui K simple kiri sedemikian sehingga $K \cap L \neq \emptyset$, berarti terdapat $a \in K \cap L$. Karena K simple kiri, berdasarkan lemma 3.4, diperoleh $K = (KKa] \cap K \subseteq (TTL] \subseteq L$. Jadi, $K \subseteq L$.

(b) Diketahui K 0-simple kiri sedemikian sehingga $K \backslash \{0\} \cap L \neq \emptyset$, berarti terdapat $a \in K \backslash \{0\} \cap L$. Karena K 0-simple kiri, berdasarkan lemma 3.5(a), $L_K(a) = K$, dan berdasarkan lemma 3.3, diperoleh $K = L_K(a) = ((a] \cup (KKa]) \cap K \subseteq (a] \cup (KKa] \subseteq (a] \cup (TTa] = L(a) \subseteq L$. Jadi, $K \subseteq L$. ■

3.3. Minimal Ideal Kiri Terurut pada Semigrup Terner Terurut

Pada bagian ini, diberikan karakteristik mengenai minimal ideal kiri terurut dan 0-minimal ideal kiri terurut pada semigrup terner terurut.

Definisi 4.1. Diberikan semigrup terner terurut T tanpa nol (dengan nol). Ideal kiri terurut L di T disebut minimal (0-minimal) jika untuk sebarang ideal ideal kiri terurut (terurut tak nol) A di T sedemikian sehingga $A \subseteq L$, maka $A = L$.

Contoh 4.2. Misal $T = \{a, b, c, d\}$ dengan operasi yang didefinisikan untuk setiap $x, y, z \in T$

$$xyz = \begin{cases} b, & x, y \in \{a, b\} \\ c, & yang\ lain \end{cases}$$

Didefinisikan relasi $\leq$ di T sebagai berikut

$$\leq := \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$$

Dapat ditunjukkan bahwa T merupakan semigrup terner terurut. Lebih lanjut dipilih $L = \{b, c\} \subseteq T$. Diambil sebarang $s, r \in T$, $y \in L$. Jika $s, r = a$ atau $b, y = b$ maka $sry = b$, dan jika $y = c$ maka $sry = c$. Jika $s, r = c$ atau $d, y = b$ maka $sry = c$, dan jika $y = c$ maka $sry = c$. Jadi, $TTL \subseteq L$. Selanjutnya, untuk sebarang $s \in T$, berdasarkan definisi "$\leq$" di atas, untuk $s \leq b$ diperoleh $s = b$ atau $s = c$, jadi $s \in L$. Untuk $s \leq c$ diperoleh $s = b$ atau $s = c$, jadi $s \in L$. Dengan kata lain L merupakan ideal kiri terurut atas T. Lebih lanjut, L juga merupakan ideal kiri terurut minimal atas T sebab untuk sebarang A ideal kiri terurut atas T, dalam hal ini $A = \{b, c\}$ berakibat $A = L$.

Teorema 4.3. Diketahui T semigrup terner terurut tanpa nol dan L ideal kiri terurut atas T. Pernyataan berikut berlaku.

a) L ideal kiri terurut minimal tanpa nol atas T jika dan hanya jika L simple kiri.

b) Jika L ideal kiri terurut dengan nol atas T, maka L 0-simple kiri.

Bukti. (a) $(\Rightarrow)$ Diketahui L ideal kiri terurut tanpa nol atas T. Diambil sebarang A yang merupakan ideal kiri terurut atas L, akan ditunjukkan $A = L$. Karena A ideal kiri terurut, berarti $TTA \subseteq A$. Misal $H := \{h \in A \mid h \leq kya\ untuk\ suatu\ k, y \in L\ dan\ a \in A\}$ berarti $\emptyset \neq H \subseteq A \subseteq L$, akan ditunjukkan bahwa H ideal kiri terurut atas T. Diambil sebarang $r, s \in T$ dan $h \in H$ berarti $h \leq kya$ untuk suatu $k, y \in L$, dan $a \in A$, jadi $rsh \leq rskya$. Karena L ideal kiri atas T diperoleh $rsh, rsk \in L$, sehingga $rskya \in A$ dan $rsh \in A$ sebab A ideal kiri terurut atas T. Akibatnya $rsh \in H$, jadi $TTH \subseteq H$. Selanjutnya, diambil sebarang $t \in T$, $h \in H$ sedemikian sehingga $t \leq h$ berarti $h \leq kya$ untuk suatu $k, y \in L$, dan $a \in A$, jadi $t \leq kya \in LLA \subseteq A \subseteq L$. Karena L ideal kiri terurut atas T diperoleh $t \in L$, sehingga $t \in A$ sebab A merupakan ideal kiri terurut atas L, akibatnya $t \in H$. Jadi H merupakan ideal kiri terurut atas T, sehingga $H = L$. Karena L ideal kiri terurut minimal atas T berakibat $A = L$, jadi L merupakan simple kiri.

$(\Leftarrow)$ Diketahui L simple kiri. Diambil sebarang J yang merupakan ideal kiri terurut atas T sedemikian sehingga $J \subseteq L$, akan ditunjukkan $J = L$. Karena L simple kiri, berdasarkan lemma 3.6(a) diperoleh $L \subseteq J$. Akibatnya $J = L$, jadi L merupakan ideal kiri terurut minimal atas T.

(b) Diketahui L ideal kiri terurut minimal dengan nol atas T. Diambil sebarang B ideal kiri terurut dengan nol atas L, berarti $LLB \subseteq B$. Misal $I := \{i \in B \backslash \{0\} \mid i \leq lyb\ untuk\ suatu\ l, y \in L\ dan\ b \in B \backslash \{0\}\}$ berarti $\emptyset \neq I \subseteq L$, akan ditunjukkan bahwa I ideal kiri terurut dengan nol atas T. Diambil sebarang $s, t \in T$, dan $i \in I$ berarti $i \leq lyb$ untuk suatu $l, y \in L$, dan $b \in B \backslash \{0\}$, jadi $sti \leq stlyb$. Karena L ideal kiri atas T, diperoleh $sti, stl \in I$. Sehingga $stlyb \in B$ dan $sti \in B$ sebab B ideal kiri terurut dengan nol atas T. Akibatnya $sti \in I$, jadi $TTI \subseteq I$. Selanjutnya, diambil sebarang $u \in T$, $i \in I$ sedemikian sehingga $u \leq i$. Karena $i \leq lyb$ untuk suatu $l, y \in L$, dan $b \in B \backslash \{0\}$, jadi $u \leq$

$lyb \in LLB \subseteq B \subseteq L$. Karena L ideal kiri terurut dengan nol atas T, diperoleh $u \in L$, sehingga $u \in B$ sebab B merupakan ideal kiri terurut dengan nol atas L. Akibatnya $u \in I$, jadi I merupakan ideal kiri terurut dengan nol atas T, sehingga $I = L$. Karena L ideal kiri terurut minimal dengan nol atas T, berakibat $B = L$. Berikutnya akan ditunjukkan $TTT \neq \{0\}$. Andaikan $TTT = \{0\}$ berarti $abc = 0$ untuk setiap $a, b, c \in T$ misal $a \neq 0$, berakibat $b, c = 0$. Kontradiksi dengan yang diketahui, haruslah $TTT \neq \{0\}$. Jadi L merupakan 0-simple kiri.

■

Teorema 4.4. Diketahui T semigrup terner terurut dengan nol dan L ideal kiri terurut bukan nol atas T. Pernyataan berikut berlaku.

a) Jika L ideal kiri terurut 0-minimal di T, maka $LLI = \{0\}$ untuk setiap I ideal kiri terurut di L atau L 0-simple kiri.
b) Jika L 0-simple kiri, maka L ideal kiri terurut 0-minimal di T.

Bukti. (a) Bukti bagian ini mirip dengan bukti syarat perlu pada bagian (a) dari Teorema 4.3.

(b) Dengan menggunakan lemma 3.6(b), bukti ini mirip dengan bukti syarat cukup pada bagian (a) dari teorema 4.3. ■

Teorema 4.5. Diketahui T semigrup terner terurut tanpa nol dan T memiliki ideal kiri terurut sejati. Setiap ideal kiri terurut sejati dari T merupakan minimal jika dan hanya jika T memuat tepat satu ideal kiri terurut sejati atau T memuat tepat dua ideal kiri terurut sejati L_1, L_2 sehingga $T = L_1 \cup L_2$ dan $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diambil J ideal kiri terurut atas T berarti J merupakan ideal kiri terurut minimal atas T. Pembuktian ini dibagi dalam dua kasus.

Kasus 1 : $T = L(a)$ untuk semua $a \in T \backslash J$ ($T \backslash J$ merupakan komplemen semua J dalam T). Diambil sebarang K yang merupakan ideal kiri terurut sejati atas T, akan ditunjukkan $K = J$. Andaikan $K \neq J$ berakibat $K \backslash J \neq \emptyset$ sebab J ideal kiri terurut minimal atas T. Berarti terdapat $a \in K \backslash J \subseteq T \backslash J$ sehingga $T = L(a) \subseteq K \subseteq T$, jadi $T = K$. Terjadi kontradiksi, jadi haruslah $K = J$. Akibatnya, pada kasus ini J merupakan ideal kiri terutut sejati tunggal atas T.

Kasus 2 : $T \neq L(a)$ untuk suatu $a \in T \backslash J$. Dari sini, diperoleh $L(a) \neq J$ dan $L(a)$ merupakan ideal kiri terurut minimal atas T. Sehingga $L(a) \cup J$ merupakan ideal kiri terurut atas T. Berdasarkan hipotesis dan $J \subseteq L(a) \cup J$, diperoleh $T = L(a) \cup J$. Karena $L(a) \cap J \subseteq L(a)$ dan $L(a)$ ideal kiri terurut minimal atas T, diperoleh $L(a) \cap J = \emptyset$. Selanjutnya diberikan K ideal kiri terurut sejati atas T berarti K merupakan ideal kiri terurut minimal atas T. Diperhatikan bahwa $K = K \cap T = (K \cap L(a)) \cup (K \cap J)$, jika $K \cap J \neq \emptyset$ maka $K \cap J$ merupakan ideal kiri terurut atas T. Karena $K \cap J \subseteq J$ dan J minimal, diperoleh $K \cap J = J$ dengan kata lain $J \subseteq K$. Karena K minimal, diperoleh $J = K$. Jika $K \cap L(a) \neq \emptyset$, dengan alasan yang sama, maka $K = L(a)$. Akibatnya, pada kasus ini, T memuat tepat dua ideal kiri terurut sejati yaitu J, $L(a)$, sehingga $T = L(a) \cup J$ dan $L(a) \cap J = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Diketahui T memuat tepat satu ideal kiri terurut sejati L. Jelas bahwa L merupakan ideal kiri terurut minimal atas T. Selanjutnya, diketahui T memuat tepat dua ideal kiri terurut sejati L_1, L_2 sedemikian sehingga $T = L_1 \cup L_2$ dan $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Jika $L_1 \nsubseteq L_2$ dan $L_2 \nsubseteq L_1$, diambil sebarang A ideal kiri atas T sedemikian sehingga $A \subseteq L_1$, sehingga $A \subseteq L_1 \subseteq M$ dan A merupakan ideal kiri terurut sejati atas M. Karena $A \subseteq L_1$, dan $L_2 \nsubseteq L_1$, berarti $A \neq L_2$. Karena T memuat tepat dua ideal kiri terurut sejati L_1, L_2, diperoleh $A = L_1$. Sehingga L_1 merupakan ideal kiri terurut minimal atas T. Lebih lanjut diambil sebarang B ideal kiri atas T sedemikian sehingga $B \subseteq L_2$. Dengan alasan yang sama, diperoleh L_2 juga merupakan ideal kiri terurut minimal atas . ■

Teorema 4.6. Diketahui T semigrup terner terurut dengan nol dan T memiliki ideal kiri terurut sejati tak nol. Setiap ideal kiri terurut sejati tak nol di T merupakan 0-minimal jika dan hanya jika T memuat tepat satu ideal kiri terurut sejati tak nol atau T memuat tepat dua ideal kiri terurut sejati tak nol L_1, L_2, sehingga $T = L_1 \cup L_2$ dan $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.
Bukti. Bukti ini dapat diperoleh dengan mempelajari bukti pada teorema 4.5. ■

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bindu, P., Sarala, Y., dan Madhusudhana, R. D., *Maximal Ordered Left Ideals in Ordered Ternary Semigroups*, 2014, International Refereed Journal of Engineering and Science (IRJES), Vol.3, 12-15.

[2] Cao, Y., dan Xu, X., *On Minimal and Maximal Left Ideals in Ordered Semigroups*, 2000, Semigroup Forum, Vol. 60, 202-207.

[3] Clifford, A. H., dan Preston, G, B., *The Algebraic Theory of Semigroups, American Mathematical Society*, Providence, 1961.

[4] Dixit, V. N., dan Dewan, S., *A Note On Quasi and Bi-ideals in Ternary Semigroups*, Internat. J. Math. Math. Sci., 1995, Vol.18, 501-508.

[5] Howie, J. M., *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press, Inc., 1955, New York.

[6] Lehmer, D. H., *A Ternary Analogue Of Abelian Groups*, Amer. J. Math., 1932, Vol.54, 329-33.