KONSTRUKSI RUANG TOPOLOGI LENGKAP

Selvy Musdalifah[1]

[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako

Abstrak

Himpunan A merupakan semimetrik-semimetrik diperluas terdefinisi atas himpunan X yang menghasilkan suatu keseragaman atas X, yang akan membangun suatu topologi seragam T untuk X. Andaikan B merupakan himpunan semimetrik-semimetrik diperluas dan bersifat semikontinu bawah yang terdefinisi atas X.Untuk suatu c $\in$ X yang tetap, didefinisikan himpunan $P_{c,B} = \{ x \in X : \forall b \in B \;\; b(x,c) \prec \infty \}$. Misalkan $\Im$ merupakan topologi seragam bagi $P_{c,B}$ yang dibangun oleh keseragaman yang dihasilkan oleh A$\cup$B. Jika ruang topologi (X,T) lengkap, maka ruang topologi ($P_{c,B}$,$\Im$) juga lengkap.

Kata Kunci : Topologi seragam, semimetrik, semikontinu, ruang topologi

I. Pendahuluan

Andaikan *X* suatu ruang abstrak, dan $X^2 = X \times X$. Himpunan $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ disebut himpunan diagonal. Didefinisikan himpunan $s^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in s\}$, untuk setiap $s \subset X^2$. Dan untuk setiap $s,t \subset X^2$ didefinisikan $s \circ t = \{(x,y) : \exists\, z \in X \;\; (x,z) \in t \; dan \; (z,y) \in s\}$.

Suatu keluarga *Q* yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari X^2 disebut sub basis keseragaman jika dan hanya jika :

1 $\forall s \in Q, \; maka \;\; \Delta \subset s$

2 $\forall s \in Q, \exists\, t \in Q \ni t \subset s^{-1}$

3 $\forall\, s \in Q, \exists\, t \in Q \ni t \circ t \subset s$

Suatu keluarga S yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari X^2 disebut basis keseragaman bila S adalah sub basis keseragaman yang tertutup terhadap operasi irisan yang berhingga, yaitu :

4 $\forall\, s,t \in S, \; maka \;\; s \cap t \in S$

Bila *Q* adalah sustu keluarga himpunan-himpunan bagian dari X^2, maka yang dilambangkan dengan *I(Q)* adalah keluarga semua irisan berhingga dari himpunan-himpunan dalam *Q*. Perhatikan bahwa bila *Q* adalah suatu sub basis keseragaman, maka *I(Q)* merupakan basis keseragaman. Suatu keluarga *V* yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari X^2 disebut keseragaman atas ruang *X* bila *V* merupakan basis keseragaman dan memenuhi sifat :

5 $\forall\, s,t \;\; dengan \;\; s \in V \;\; dan \; s \subset t \subset X^2 \;\; maka \;\; t \in V.$

Bila S adalah suatu keluarga himpunan-himpunan bagian dari X^2,maka yang dimaksud dengan *Q(S)* adalah keluarga semua himpunan yang memuat himpunan-himpunan dalam S. Bila *S* suatu basis keseragaman, maka *Q(S)* merupakan keseragaman atas ruang *X*.

Suatu pasangan *(X,V)* dengan *X* ruang abstrak tak kosong dan *V* adalah suatu keseragaman atas *X* disebut ruang seragam dan untuk setiap $v\in V$ dan $x\in X$, himpunan $v(x) = \{y \in X : (x,y) \in v\}$ disebut sekitaran dari *x* yang dihasilkan oleh oleh *v*.Suatu himpunan bagian *H* dari *X* disebut buka terhadap keseragaman *V* jika $\forall\ x \in H, \exists\ v \in V \ni v(x) \subset H$. Mudah dibuktikan bahwa keluarga *T* yang terdiri dari semua himpunan buka terhadap suatu keseragaman *V* merupakan suatu topologi, yang disebut dengan topologi seragam yang dibangun oleh keseragaman *V*.

II. Teori Penunjang

II.1 Ruang Topologi Lengkap:

Suatu himpunan terarah adalah suatu pasangan $(D,\geq)$ dimana *D* himpunan tak kosong dan $\geq$ adalah suatu relasi yang didefinisikan pada *D* sedemikian sehingga :

1. $\forall\ u \in D,\ maka\ \ u \geq u$
2. $\forall\ u,v,w \in D, u \geq v\ \ dan\ \ v \geq w \Rightarrow u \geq w$
3. $\forall\ u,v \in D, \exists\ w \in D\ \ sehingga\ \ w \geq u\ \ dan\ \ w \geq v$

Suatu fungsi *s* yang memetakan himpunan terarah $(D,\geq)$ ke himpunan *X* disebut net. Selanjutanya suatu net akan kita lambangkan dengan S_n untuk setiap $n\in D$. Suatu net S_n dalam suatu ruang keseragaman *(X,V)*, disebut net Cauchy jika $\forall\ v \in V,\ \exists\ n_\circ \in D \ni (S_m,S_n) \in v,\ untuk\ \ semua\ m.,n \geq n_\circ$. Suatu ruang seragam dikatakan lengkap jika setiap net Cauchy dalam ruang seragam tersebut konvergen kesuatu titik dalam ruang itu terhadap topologi seragam yang dibangunnnya.

Suatu ruang topologi *(X,T)* dikatakan lengkap jika dan hanya jika terdapat suatu keseragaman *V* atas *X* sedemikian sehingga ruang seragam *(X,V)* adalah lengkap dan *T* adalah topologi seragam yang dibangun oleh *V*.

Suatu pemetaan $q: X^2 \to [0,\infty]$ disebut semimetrik diperluas yang didefinisikan atas himpunan *X* jika *q* memenuhi sifat-sifat berikut :

1. $\forall\ x \in X,\ maka\ \ q(x,x) = 0$
2. $\forall\ x,y \in X,\ maka\ q(x,y) = q(y,x)$
3. $\forall\ x,y,z \in X,\ maka\ \ q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y)$.

Pemetaan ini disebut semisimetrik hanya jika mempunyai nilai yang berhingga. Jika *q* adalah suatu semimetrik diperluas yang didefinisikan atas himpunan *X* maka *q* disebut semikontinu bawah jika $q^{-1}[0,r]$ merupakan himpunan tutup dalam topologi hasilkali dari X^2.

Andaikan *A* adalah himpunan semimetrik-semimetrik yang didefinisikan atas *X*. Untuk $a\in A$ dan $r> 0$, kita definisikan :

$$v_{a,r} = \{(x,y) \in X^2 : a(x,y) \prec r\}$$
$$= a^{-1}\left[0,r\right).$$

Akan dibuktikan bahwa keluarga semua himpunan bagian dari X^2 merupakan subbasis keseragaman.

Lemma 1: Keluarga $K = \{v_{a,r} : a \in A,\ r \succ 0\}$ adalah suatu subbasis keseragaman atas *X*.

Bukti :

1 $\Delta \subset v_{a,r}, \forall\, a \in A \text{ dan } r \succ 0, \text{sebab } a(x,x) = 0 \prec r, \forall\, x \in X$

2 $\text{Jika } v_{a,r} \in K, \text{maka } v_{a,r}^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in v_{a,r}\}$

$= \{(x,y) : a(y,x) \prec r\}$

$= \{(x,y) : a(y,x) \prec r\} \in K$

3 $\text{Jika } v_{a,r} \in K, \text{maka } v_{a,r/2}^{-1} \text{ juga berada dalam } K, \text{ Ambil sebarang } (x,y) \in v_{a,r/2} \circ v_{a,r/2},$

$\text{pilih } z \in X \ni (x,z) \text{ dan } (z,y) \text{ berada dalam } v_{a,r/2}, \text{ maka } a(x,y) \le a(x,z) + a(z,y) < r/2 + r/2 = r.\ \text{Jadi } (v_{a,r/2} \circ v_{a,r/2}) \subset v_{a,r}$

Keseragaman *V=Q(I(K))* yang diperoleh dengan cara demikian itu dari subbasis keseragaman *K* di atas disebut keseragaman yang dihasilkan oleh himpunan semimetrik *A*.Keseragaman *V* ini membangun suatu topologi seragam *T* untuk himpunan *X*, dan ruang topologi *(X,T)* adalah lengkap jika dan hanya jika ruang seragam *(X,V)* juga lengkap.

Andaikan *A* dan *B* adalah himpunan semimetrik-semimetrik diperluas yang didefinisikan atas *X*, dan *V,W* merupakan keseragaman atas *X* yang dihasilkan berturut-turut oleh *A* dan *B* . Misalkan $P \subset X$ dan *U* keseragaman atas *P* yang dihasilkan oleh $A \cup B$. Akan dibuktikan lemma berikut :

Lemma 2: Bila S_n suatu net Cauchy dalam ruang seragam *(P,U)*.maka S_n juga merupakan net Cauchy dalam ruang seragam *(X,V)* maupun *(X,W)*.

Bukti :

Misalkan S_n suatu net Cauchy dalam ruang seragam *(P,U)*, dan $v \in V$ sebarang , maka terdapat a_1 ,a_2 , … $a_n \in A$ dan $r_1, r_2, \ldots r_n > 0$ sedemikian sehingga:

$$\bigcap_{k=1}^{n} v_{a_k,r_k} \subset v$$

dimana $v_{a_k,r_k} = \{(x,y) \in X^2 : a_k(x,y) \prec r_k\}$.

Andaikan $u = \left(\bigcap_{k=1}^{n} v_{a_k,r_k}\right) \cap P^2$

Maka $u \subset v$ dan $u \in U$, sehingga ada $n_o \in D$ sedemikian sehingga $(S_m,S_n) \in u$ .Akibatnya $(S_m,S_n) \in v$,untuk semua $m,n \ge n_o$.

Jadi S_n merupakan net Cauchy dalam ruang seragam *(X,V)*.Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa S_n juga merupakan net Cauchy dalam ruang seragam *(X,W)*.

II.2 Konstruksi Ruang Topologi Lengkap

Andaikan *A* merupakan himpunan semimetrik-semimetrik yang didefinisikan atas himpunan *X* dan *T* merupakan topologi seragam untuk *X* yang dibangun oleh keseragaman *V* yang dihasilkan oleh *A*. Andaikan *B* adalah himpunan semimetrik-semimetrik diperluas yang bersifat semi kontinu bawah yang didefinisikan atas *X* dan *W* adalah keseragaman atas *X* yang dihasilkan oleh *B* Untuk suatu $c \in X$ yang tetap kita definisikan :

$$P_{c,B} = \{x \in X : \forall b \in B \ \ b(x,c) \prec \infty\}$$

Andaikan $\Im$ merupakan topologi seragam untuk $P_{c,B}$ yang dibangun oleh keseragaman *U* yang dihasilkan oleh $A \cup B$.

Teorema : Jika *(X,T)* merupakan suatu ruang topologi yang lengkap, maka untuk setiap $c \in X$ dan setiap himpunan *B* yang terdiri dari semimetrik-semimetrik diperluas yang bersifat semikontinu bawah dan didefinisikan atas *X*, ruang $P_{c,B}, \Im$ juga lengkap.

Bukti:

Andaikan S_n adalah suatu net Cauchy dalam ruang seragam $P_{c,B}, U$.

Menurut lemma 2. S_n juga net Cauchy dalam ruang seragam *(X,V)* maupun *(X,W).* Karena ruang seragam *(X,V)* adalah ruang seragam yang lengkap, maka S_n konvergen kesuatu titik $s \in X$. Perhatikan bahwa untuk setiap $a \in A$ dan $r > 0$, sekitaran $v_{a,r}[s]$ dari titik s merupakan himpunan buka dalam topologi *T.* Maka terdapat $n_o \in D$ sedemikian sehingga $S_m \in v_{a,r}[s]$. Akibatnya untuk semua $m \geq n_o$, $(S_m,s) \in v_{a,r}[s]$.

Karena S_n merupakan net Cauchy dalam ruang seragam *(X,W),* maka untuk setiap $b \in B$ dan $r > 0$ terdapat $n_o \in D$ sedemikian sehingga $(S_m,S_n) \in v_{b,r/2} = b^{-1} = [0, r/2$, untuk semua $m,n \geq n_o$. Karena S_n konvergen ke titik *s*, maka (S_m,S_n) konvergen ke (S_m,s) dalam topologi hasilkali dari X^2. Tetapi $b^{-1} = [0, r/2$ merupakan himpunan tutup karena *b* semikontinu bawah. Maka untuk setiap $m \geq n_o$ $(S_m,s) \in v_{b,r/2} = b^{-1} = [0, r/2$. Dengan demikian $(S_m,s) \in v_{a,r} = b^{-1} = [0, r$. Jadi untuk setiap $b \in B$ dan $r > 0$, terdapat $n_o \in D$ sedemikian sehingga $b\ (S_m,s) < r$ untuk semua $m \geq n_o$. Akibatnya $s \in P_{c,B}$

Karena untuk setiap $b \in B$ dan $r > 0$ berlaku

$b\ \ s,c\ \ \leq b\ \ s,s_m\ \ + b\ \ s_m,c\ \ \prec r + b\ \ s_m,c\ \ \prec \infty$, *untuk setiap* $m \geq n_\circ$

Ambil sebarang himpunan buka $G \in \Im$ sedemikian sehingga titik $s \in G$.

Maka terdapat himpunan $u \in U$ sedemikian sehingga $u[s] \subset G$. Kita definisikan :

$$u_{a,r} = \ \ x,y\ \ \in P_{c,B} : a\ \ x,y\ \ \prec r$$
$$= u_{a,r} \cap P_{c,B}$$

Karena $u \in U$, maka terdapat $a_1, a_2, \ldots a_k \in (A \cup B)$ dan bilangan-bilangan positif $r_1, r_2, \ldots r_k$ sedemikian sehingga : $\bigcap_{i=1}^{k} u_{a_i}, _{r_i} \subset u$

untuk setiap a_i dan r_i, $i = 1,2,\ldots,k$ terdapat $n_i \in D$ sedemikian sehingga $(S_m,s) \in v_{a_i}, _{r_i}$, untuk semua $m \geq n_i$. Tetapi S_m dan *s* berada dalam $P_{c,B}$,sehingga $(S_m,s) \in u_{a_i}, _{r_i}$,untuk setiap i dan untuk semua $m \geq n_i$.

Ambil $n \in D$ sedemikian sehingga $n \geq n_i$ untuk setiap *i*. Jika $m \geq n$ maka $(S_m,s) \in u_{a_i}, _{r_i}$, untuk setiap *i*. Jadi $(S_m,s) \in u$ yang berarti bahwa $S_m \in u[s]$,akibatnya $S_m \in G$ untuk semua $m \geq n$. Dengan demikian terbukti bahwa jika ruang seragam $P_{c,B}, U$. Lengkap maka ruang topologi $P_{c,B}, \Im$ juga lengkap.

III. Kesimpulan

Jika (X,T) merupakan suatu ruang topologi yang lengkap, maka untuk setiap $c \in X$ dan setiap himpunan B yang terdiri dari semimetrik-semimetrik diperluas yang bersifat semikontinu bawah dan didefinisikan atas X, ruang $\left(P_{c,B}, \Im\right)$ juga lengkap.

IV. Daftar Pustaka :

1. Cohen, L.W. *On Topological Completeness*. Bull. Amer. Math. Soc, 1940
2. Kelley, J. L. *General Topology*. New York , Springer-Verlag, 1975
3. Neumann, J.V. *On Complete Topological Spaces*. Trans. Amer. Math. Soc, 1935.