

# PRILAKU PENYELESAIAN PERSAMAAN LOTKA-VOLTERRA AKIBAT WAKTU TUNDA (*TIME DELAY*)

La Gubu<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Haluoleo Kampus Bumi Tridharma Anduonohu Kendari  
93232 Email: [lagubu2001@yahoo.com](mailto:lagubu2001@yahoo.com)

## Abstrak

Model prey-predator Lotka-Volterra dengan waktu tunda merupakan model interaksi satu prey dan satu predator. Model ini melibatkan persamaan integral dan sistem persamaan diferensial non linear autonomous. Sistem persamaan tersebut dapat dilinearkan dengan menggunakan Transformasi Laplace disekitar titik kesetimbangannya, kemudian ditentukan perilaku penyelesaiannya dengan menggunakan hampiran solusi. Sistem persamaan ini mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik (0,0) dan titik  $\left(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1}\right)$ . Untuk memeriksa apakah titik kesetimbangan tersebut stabil atau tidak dapat dilihat dari nilai-nilai eigen yang diperoleh. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik  $\left(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1}\right)$  merupakan titik kesetimbangan yang stabil asimtotik.

## I. PENDAHULUAN

Banyak sistem interaksi yang berlangsung dalam ekosistem alami, salah satunya adalah sistem interaksi mangsa-pemangsa (*prey-predator*). *Predator* merupakan spesies pemangsa yang secara fisik ukurannya lebih besar dibandingkan dengan prey, sedangkan *prey* adalah spesies yang dimangsa yang ukurannya lebih kecil daripada predator, (Boyce dan Diprima, 1997).

Sistem interaksi *prey-predator* dalam hal ini satu *prey* dan satu *predator* telah disusun oleh Lotka dan Volterra, yang selanjutnya disebut model persamaan Lotka-Volterra (L-V). Walaupun model L-V tidak dapat menggambarkan secara kompleks hubungan antar spesies seperti kejadian nyata di alam, tetapi model sederhana tersebut merupakan langkah awal untuk mengetahui perilaku hubungan antara prey dan predator dari sudut pandang matematika.

Model persamaan L-V dapat diselesaikan dengan linierisasi persamaan nonlinier pada titik kesetimbangan dan kestabilannya yang sangat peka terhadap gangguan (perturbasi). Karena modelnya yang cukup sederhana menyebabkan model ini banyak digunakan sebagai dasar bagi pengembangan model yang lebih realitas.

Berbagai asumsi digunakan untuk memodifikasi model interaksi persamaan L-V dengan mempertimbangkan faktor-faktor yang berpengaruh atas masing-masing pertumbuhan spesies *prey* dan *predator* yang berinteraksi. Jika dalam suatu populasi terjadi bencana akibat pengaruh biotik maka pertumbuhan spesies-spesies dalam populasi tersebut akan mengalami gangguan. Hal ini berakibat pertumbuhan prey akan mengalami penundaan akibat rusaknya sumberdaya yang ada.

---

---

Lebih lanjut pertumbuhan predator akan ikut mengalami penundaan akibat berkurangnya prey sebagai sumber bahan makanan utama. Hal ini yang menjadi acuan untuk mengembangkan model L-V akibat kerusakan populasi.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Model Persamaan Lotka-Volterra (L-V)

Lotka-Volterra membangun model interaksi dua spesies yakni mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*) dengan menganggap bahwa  $x_1$  sebagai (*prey*) dan  $x_2$  sebagai pemangsa (*predator*) yang saling berinteraksi pada suatu daerah tertentu. Asumsi-asumsi yang digunakan untuk membangun model interaksi dua spesies, berdasarkan Lotka-Volterra adalah sebagai berikut :

1. Jika populasi predator diabaikan, maka laju pertumbuhan populasi prey akan naik secara eksponensial, diperoleh  $\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1$ ,  $a_1 =$  konstanta proporsional.
2. Jika populasi prey diabaikan, maka laju pertumbuhan populasi predator akan menurun, diperoleh  $\frac{dx_2}{dt} = -a_2x_2$ ,  $a_2 =$  konstanta proporsional.
3. Setiap interaksi kedua populasi, akan meningkatkan pertumbuhan populasi predator dan menghalangi pertumbuhan populasi prey. Oleh karena itu, pertumbuhan populasi predator bertambah sebanyak  $\alpha_2x_1x_2$ , sedangkan pertumbuhan populasi prey akan berkurang sebanyak  $-\alpha_1x_1x_2$ , dengan  $\alpha_1, \alpha_2$  konstanta proporsional.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut di atas dapat dibentuk sistem persamaan:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - \alpha_1x_1x_2 \quad \frac{dx_2}{dt} = -a_2x_2 + \alpha_2x_1x_2, \quad (2.1)$$

dengan  $a_1, a_2, \alpha_1$  dan  $\alpha_2$  konstanta proporsional dan positif.

Sistem persamaan (2.1) disebut persamaan predator-prey Lotka-Volterra (L-V), (Boyce dan Diprima, 1997). Kedua populasi yang berinteraksi dari sistem persamaan (2.1) ternyata juga merupakan interaksi simbiosis mutualisme. Karena dalam suatu populasi tidak ada spesies yang dapat hidup bertahan lama tanpa kehadiran spesies lain.

### 2.2 Persamaan L-V Akibat Waktu Tunda

Bagian ini akan dibangun model persamaan prey-predator L-V akibat adanya kerusakan populasi yang dapat mempengaruhi pertumbuhan prey yang juga akan mempengaruhi pertumbuhan predator berdasarkan persamaan (2.1) yang telah dibangun. Hal ini biasa dikenal model prey-predator akibat waktu tunda.

**Definisi 2.2.1** *Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial tundaan (Differential Delay Equation), jika pada persamaan terdapat hubungan ketergantungan antara waktu sebelumnya dan waktu sekarang.*

Diasumsikan bahwa laju perubahan pertumbuhan kedua populasi (*prey* dan *predator*) bergantung pada ukuran populasi awal pada saat itu, yaitu  $x(t-s)$  dengan  $s \geq 0$ , sehingga efek  $x(t-s)$  pada  $\frac{dx}{dt}$  bergantung pada  $s$  dan diukur oleh fungsi normalisasi  $k(s)$ , sehingga efek rata-rata pembobotan dari ukuran semua populasi awal pada  $\frac{dx}{dt}$  diberikan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\int_0^{\infty} x(t-s) k(s) ds}{\int_0^{\infty} k(s) ds}, \quad (2.2)$$

dimana  $k(s)$  merupakan bentuk normalisasi pada fungsi pembobot atau fungsi kernel (*kernel function*) yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\int_0^{\infty} k(s) ds = 1, \quad (2.3)$$

berakibat bahwa ukuran semua populasi awal  $x(t)$  tergantung pada

$$\int_0^t k(t-s) x(s) ds = \int_0^{\infty} k(t-s) x(t-z) dz. \quad (2.4)$$

Berdasarkan Definisi 2.2.1 dan persamaan (2.4), dapat dibentuk persamaan L-V akibat waktu tunda, dengan mengasumsikan bahwa ukuran populasi prey  $x_1$  berkurang dalam masa persiapan akibat interaksi dengan predator  $x_2$ , sehingga berdasarkan persamaan (2.1), diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 - \alpha_1 x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a_2 x_2 + \alpha_2 x_2 \int_{-\infty}^t k(t-s) x_1(s) ds = -a_2 x_2 + \alpha_2 x_2 \int_0^{\infty} k(t-z) x_1(t-z) dz \end{aligned} \quad (2.5)$$

dimana  $k(t-s)$  merupakan fungsi normalisasi yang berpengaruh terhadap  $t$  dari populasi pertama pada saat  $s \leq t$  setelah waktu interval  $t-s$ .

Lebih lanjut berdasarkan persamaan (2.5), laju populasi prey akan bertambah akibat pengaruh laju perubahan populasi predator yang berkurang sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 - \alpha_1 x_1 \int_{-\infty}^t k_2(t-s) x_2(s) ds = a_1 x_1 - \alpha_1 x_1 \int_0^{\infty} k_2(t-z) x_2(t-z) dz \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a_2 x_2 + \alpha_2 x_2 \int_{-\infty}^t k_1(t-s) x_1(s) ds = -a_2 x_2 + \alpha_2 x_2 \int_0^{\infty} k_1(t-z) x_1(t-z) dz \end{aligned} \quad (2.6)$$

dimana  $k_1(z)$  dan  $k_2(z)$  merupakan fungsi normalisasi atau fungsi kernel tundaan (*delay kernel function*), yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\int_0^{\infty} k_1(z) dz = 1, \quad \int_0^{\infty} k_2(z) dz = 1. \quad (2.7)$$

Sistem persamaan (2.6) disebut persamaan L-V dengan waktu tunda, (J.N Kapur, 2000).

### 2.3 Kesetimbangan Persamaan L-V dengan Waktu Tunda

Bagian ini akan diberikan beberapa pengertian yang berhubungan dengan kesetimbangan untuk menyelesaikan persamaan L-V akibat waktu tunda. Berikut definisi tentang bagaimana menentukan titik kesetimbangan.

**Definisi 2.3.1** Misalkan diberikan sistem dua dimensi :

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2) \text{ dan } dx_2/dt = f_2(x_1, x_2). \tag{2.8}$$

Diasumsikan bahwa  $f_1$  dan  $f_2$  kontinu dan mempunyai turunan parsial terhadap  $x_1$  dan  $x_2$ . Titik kesetimbangan diperoleh jika

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \text{ dan } f_2(x_1, x_2) = 0 \tag{2.9}$$

Nilai  $x_1$  dan  $x_2$  yang memenuhi persamaan (2.9) disebut titik kesetimbangan dari persamaan (2.8).

**Definisi 2.3.2.** Sifat-sifat kesetimbangan interaksi dua spesies prey-predator, yaitu sebagai berikut :

- 1) Kesetimbangan sistem merupakan tipe yang stabil tapi tidak stabil asimtotik (menghasilkan trayektori pusat netral atau lintasan mengelilingi titik kesetimbangannya), jika nilai eigen dari matriks Jacobi adalah  $\lambda = \alpha + \beta i$  dengan  $\alpha = 0$ .
- 2) Kesetimbangan sistem merupakan tipe yang stabil asimtotik (semua trayektori lintasannya menuju titik kesetimbangan), jika nilai eigen dari matriks Jacobi adalah  $\lambda < 0$
- 3) Kesetimbangan sistem merupakan tipe yang stabil asimtotik, jika nilai eigen dari matriks Jacobi adalah  $\lambda = \alpha + \beta i$  dengan  $\alpha < 0$
- 4) Kesetimbangan sistem merupakan tipe tidak stabil (semua trayektori menjauhi titik kesetimbangannya), jika nilai eigen dari matriks Jacobi adalah  $\lambda \neq 0$  dan keduanya positif.
- 5) Kesetimbangan sistem merupakan tipe tidak stabil (semua trayektori menjauh atau memencar dari titik kesetimbangannya), jika nilai eigen dari matriks Jacobi adalah  $\lambda = \alpha + \beta i$  dengan  $\alpha > 0$ .

Secara umum untuk mencari solusi analitik sistem persamaan L-V (2.6) sangatlah sulit, untuk menyelesaikannya akan diberikan asumsi sebagai berikut, jika

$$x_1(t) = \bar{x}_1 \text{ dan } x_2(t) = \bar{x}_2, \tag{2.10}$$

maka berdasarkan persamaan (2.6) dan Definisi 2.3.1, diperoleh

$$a_1 \bar{x}_1 - \alpha_1 \bar{x}_1 \int_0^{\infty} k_2(z) \bar{x}_2 dz = 0 \text{ karena } \int_0^{\infty} k_2(z) dz = 1, \text{ berakibat}$$

$$\bar{x}_1 (a_1 - \alpha_1 \bar{x}_2) = 0, \text{ sehingga diperoleh } \bar{x}_1 = 0 \text{ atau } \bar{x}_1 = \frac{a_1}{\alpha_1}.$$

Selanjutnya  $-a_2 \bar{x}_2 + \alpha_2 \bar{x}_2 \int_0^{\infty} k_1(z) \bar{x}_1 dz = 0$  karena  $\int_0^{\infty} k_1(z) dz = 1$ , berakibat

$$\bar{x}_2 (a_2 - \alpha_2 \bar{x}_1) = 0, \text{ maka diperoleh } \bar{x}_2 = 0 \text{ atau } \bar{x}_2 = \frac{a_2}{\alpha_2}$$

Jadi diperoleh dua titik kesetimbangan (*equilibrium*), yaitu titik (0,0) dan  $\left( \frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1} \right)$ .

## 2.4 Sistem Non Linier dan Kestabilan

Sistem persamaan diferensial nonlinear yang tidak bergantung terhadap waktu (*autonomous*) biasa dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (2.11)$$

Jika sistem persamaan diferensial (2.11) mempunyai keadaan kesetimbangan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  dan  $u_i = x_i - \bar{x}_i$  maka menurut ekspansi Taylor untuk fungsi dua peubah disekitar titik  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  diperoleh :

$$f_i(x_1, x_2) \approx f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + u_i \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_i} + \frac{u_i^2}{2!} \frac{\partial^2 f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_i^2} + \dots, \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} \text{atau } f_1(x_1, x_2) \approx & f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (x_1 - \bar{x}_1) \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} + (x_2 - \bar{x}_2) \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \\ & + \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1^2} + \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2^2} \\ & + \frac{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{2!} \frac{\partial^2 f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \end{aligned} \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2) \approx & f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + (x_1 - \bar{x}_1) \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} + (x_2 - \bar{x}_2) \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \\ & + \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1^2} + \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2^2} \\ & + \frac{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{2!} \frac{\partial^2 f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \end{aligned} \quad (2.12b)$$

Persamaan (2.12a) dan (2.12b) dapat juga dituliskan dalam bentuk :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) \approx & f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + u_1 \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} + g_1(u_1, u_2), \quad u_1 = x_1 - \bar{x}_1 \\ f_2(x_1, x_2) \approx & f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + u_1 \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} + g_2(u_1, u_2), \quad u_2 = x_2 - \bar{x}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dimana } g_1(u_1, u_2) \approx & \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1^2} + \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2^2} \\ & + \frac{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{2!} \frac{\partial^2 f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \\ g_2(u_1, u_2) \approx & \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1^2} + \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2^2} \\ & + \frac{(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{2!} \frac{\partial^2 f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots \end{aligned}$$

Jika  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  merupakan keadaan kesetimbangan (*equilibrium*), maka :  $f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \quad i = 1, 2$ .

Di definisikan :

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt} x_1 - \bar{x}_1, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt} x_2 - \bar{x}_2 \tag{2.13}$$

sehingga persamaan (2.11) dapat ditulis :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u_1, u_2) \\ g_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Karena di titik kesetimbangan  $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$ , dan di sekitar titik kesetimbangan  $x_1$  dianggap cukup dekat dengan  $\bar{x}_1$ , demikian pula dengan  $x_2$  dan  $\bar{x}_2$ , maka  $\bar{x}_1$  dan  $\bar{x}_2$  nilainya sangat kecil. Hal ini menyebabkan suku-suku  $g(u_1, u_2)$  yang memuat  $\bar{x}_1^2$ ,  $\bar{x}_2^2$ ,  $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ , ... dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

dalam notasi vektor dapat dituliskan :  $\dot{x} = Au$

dimana  $\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}$ ,  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ , dan

$A$  disebut turunan parsial pertama yang disebut matriks Jacobian dari  $f$  pada  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  yang memberikan hasil sistem linier :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Nilai eigen matriks konstan  $A$  memberikan informasi kestabilan lokal di titik kesetimbangan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , (Nayfeh dan Balachandra, 1995).

### III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Predator prey L-V dengan waktu tunda dapat dituliskan kembali seperti berikut ini :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 - \alpha_1 x_1 \int_{-\infty}^t k_2(t-s) x_2(s) ds = a_1 x_1 - \alpha_1 x_1 \int_0^{\infty} k_2(z) x_2(t-z) dz \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a_2 x_2 + \alpha_2 x_2 \int_{-\infty}^t k_1(t-s) x_1(s) ds = -a_2 x_2 + \alpha_2 x_2 \int_0^{\infty} k_1(z) x_1(t-z) dz \end{aligned} \tag{3.1}$$

Jika  $x_1(t) = \bar{x}_1$  dan  $x_2(t) = \bar{x}_2$ , maka telah diperoleh dua titik kesetimbangan dari persamaan (3.1), yaitu titik (0,0) dan  $\left(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1}\right)$ . Titik kesetimbangan (0,0) dapat diabaikan, karena tidak ada pertumbuhan populasi dari kedua populasi atau di titik ini tidak ada prey dan predator. Oleh karena itu, disini hanya dapat diambil keadaan kesetimbangan disekitar titik  $\left(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1}\right)$

Misalkan  $u_1$  dan  $u_2$  adalah perturbasi pada keadaan seimbang, sehingga dari asumsi persamaan (2.10) dimodelkan dalam persamaan perturbasi dalam bentuk

$$x_1(t) = \bar{x}_1 + u_1(t), \quad x_2(t) = \bar{x}_2 + u_2(t) \quad (3.2)$$

Persamaan (3.2) disubstitusi kedalam persamaan (3.1) disekitar titik kesetimbangan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{x}_1 + u_1)}{dt} &= a_1(\bar{x}_1 + u_1) - \alpha_1(\bar{x}_1 + u_1) \int_0^\infty k_2(z) (\bar{x}_2 + u_2)(t-z) dz \\ \frac{du_1}{dt} &= a\bar{x}_1 + a_1u_1 - \alpha_1\bar{x}_1 \int_0^\infty k_2(z) \bar{x}_2 dz - \alpha_1\bar{x}_1 \int_0^\infty k_2(z) u_2(t-z) dz \\ &\quad - \alpha_1u_1 \int_0^\infty k_2(z) \bar{x}_2 dz - \alpha_1u_1 \int_0^\infty k_2(z) u_2(t-z) dz \\ \frac{du_1}{dt} &= a_1\bar{x}_1 + a_1u_1 - \alpha_1u_1\bar{x}_2 - \alpha_1\bar{x}_1\bar{x}_2 - \alpha_1\bar{x}_1 \int_0^\infty k_2(z) u_2(t-z) dz \\ &\quad - \alpha_1u_1 \int_0^\infty k_2(z) u_2(t-z) dz \end{aligned}$$

Dalam hal ini, akan dinolkan bagian yang konstan dan perkalian dari  $u_i$  dengan  $i = 1, 2$ , sehingga diperoleh :

$$\frac{du_1}{dt} = a_1u_1 - \alpha_1u_1\bar{x}_2 - \alpha_1\bar{x}_1 \int_0^\infty k_2(z) u_2(t-z) dz$$

Atau 
$$\frac{du_1}{dt} = a_1u_1 - \alpha_1u_1 \frac{a_1}{\alpha_1} - \alpha_1 \frac{a_2}{\alpha_2} \int_0^\infty k_2(z) u_2(t-z) dz,$$

lebih lanjut

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{x}_2 + u_2)}{dt} &= -a_2(\bar{x}_2 + u_2) + \alpha_2(\bar{x}_2 + u_2) \int_0^\infty k_1(z) (\bar{x}_1 + u_1)(t-z) dz \\ \frac{du_2}{dt} &= -a_2\bar{x}_2 - a_2u_2 + \alpha_2\bar{x}_2 \int_0^\infty k_1(z) \bar{x}_1 dz + \alpha_2\bar{x}_2 \int_0^\infty k_1(z) u_1(t-z) dz \\ &\quad + a_2u_2 \int_0^\infty k_1(z) \bar{x}_1 dz + a_2u_2 \int_0^\infty k_1(z) u_1(t-z) dz \end{aligned}$$

$$\frac{du_2}{dt} = -a_2\bar{x}_2 - a_2u_2 + \alpha_2\bar{x}_2\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 \int_0^\infty k_1 z u_1 t-z dz + \alpha_2u_2\bar{x}_1 + \alpha_2u_2 \int_0^\infty k_1 z u_1 t-z dz$$

Dalam hal ini, akan dinolkan bagian yang konstan dan perkalian dari  $u_i$ , dengan  $i = 1,2$ , sehingga diperoleh :

$$\frac{du_2}{dt} = -a_2u_2 + \alpha_2u_2\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 \int_0^\infty k_1 z u_1 t-z dz$$

Atau 
$$\frac{du_2}{dt} = -a_2u_2 + \alpha_2u_2 \frac{a_2}{\alpha_2} + \alpha_2 \frac{a_1}{\alpha_1} \int_0^\infty k_1 z u_1 t-z dz .$$

Jadi dari persamaan (4.1) dan persamaan (4.3) diperoleh :

$$\frac{du_1}{dt} = a_1u_1 - \alpha_1u_1\bar{x}_2 - \alpha_1\bar{x}_1 \int_0^\infty k_2 z u_2 t-z dz \tag{3.3}$$

$$\frac{du_2}{dt} = -a_2u_2 + \alpha_2u_2\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 \int_0^\infty k_1 z u_1 t-z dz$$

Persamaan (3.3) dapat diselesaikan dengan mengambil hampiran solusi numerik

$$u_1 = A_1e^{\lambda t} , u_2 = A_2e^{\lambda t} \tag{3.4}$$

Persamaan (3.4) disubstitusi kedalam persamaan (3.3) disekitar titik kesetimbangan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  diperoleh

$$\frac{d A_1e^{\lambda t}}{dt} = a_1A_1e^{\lambda t} - \alpha_1A_1e^{\lambda t}\bar{x}_2 - \alpha_1\bar{x}_1 \int_0^\infty k_2 z A_2e^{\lambda t-z} dz$$

$$\lambda A_1 = a_1A_1 - \alpha_1A_1\bar{x}_2 - \alpha_1\bar{x}_1 \int_0^\infty k_2 z e^{-z\lambda} dz,$$

Karena  $e^{\lambda t} \neq 0$  . Jadi dari persamaan (3.3) dan persamaan (3.4) diperoleh :

$$\lambda A_1 = a_1A_1 - \alpha_1A_1\bar{x}_2 - \alpha_1\bar{x}_1 \int_0^\infty k_2 z e^{-z\lambda} dz , \tag{3.5}$$

$$\lambda A_2 = -a_2A_2 + \alpha_2A_2\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2A_1 \int_0^\infty k_1 z e^{-z\lambda} dz$$

sehingga

$$\lambda A_1 = -\alpha_1 \frac{a_2}{\alpha_2} A_2 \int_0^\infty k_2 e^{-z\lambda} dz = -\alpha_1 \frac{a_2}{\alpha_2} A_2 k_2^* \tag{3.6}$$

$$\lambda A_2 = \alpha_2 \frac{a_1}{\alpha_1} A_1 \int_0^\infty k_1 e^{-z\lambda} dz = -\alpha_2 \frac{a_2}{\alpha_2} A_1 k_1^* \tag{3.6}$$

Persamaan (3.6) merupakan solusi persamaan (3.3) yang bisa juga ditulis dalam bentuk

$$\lambda A_2 = \alpha_2\bar{x}_2A_1k_1^* \lambda \quad \lambda A_1 = -\alpha_1\bar{x}_1A_2k_2^* \lambda \tag{3.7}$$

dimana  $k_1^*(s)$  dan  $k_2^*(s)$  merupakan Transformasi Laplace pada  $k_1(z)$  dan  $k_2(z)$ , dengan persamaannya sebagai berikut:

$$L\{k_1(z)\} = k_1^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sz} k_1(z) dz \text{ dan } L\{k_2(z)\} = k_2^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sz} k_2(z) dz$$

Matriks Jacobian dari persamaan (3.3) yang diperoleh dari persamaan (3.7) disekitar titik kesetimbangan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  adalah

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1, x_2 = \bar{x}_1, \bar{x}_2} \quad (3.8)$$

Karena A merupakan matriks Jacobian, maka matriks Jacobi dari persamaan (3.7) dapat ditulis

sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 \frac{a_2}{\alpha_2} \\ \alpha_2 \frac{a_1}{\alpha_1} & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks A diatas adalah

$$\lambda^2 + a_1 a_2 k_1^*(s) k_2^*(s) = 0. \quad (3.9)$$

Untuk menentukan nilai  $k_1^*(\lambda)$  dan  $k_2^*(\lambda)$  akan diberikan model distribusi tunda dengan persamaan berikut :

$$k_1(z) = \frac{e^{-az} a^n z^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad k_2(z) = \frac{e^{-bz} b^m z^{m-1}}{\Gamma(m)} \quad (3.10)$$

dimana  $m, n, a, b, z$  adalah konstanta positif.

Dengan menggunakan Transformasi Laplace pada  $k_1(z)$  dan  $k_2(z)$  diperoleh  $k_1^*(\lambda)$  dan  $k_2^*(\lambda)$  berdasarkan persamaan (3.10) yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L\{k_1(z)\} = L\left\{\frac{e^{-az} a^n z^{n-1}}{\Gamma(n)}\right\},$$

$$k_1^*(s) = \frac{a^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-(s+a)z} z^{n-1} dz. \quad (3.11)$$

Untuk mencari integral dari persamaan (3.11) akan dimisalkan  $u = (s + a)z$  dengan  $dz = \frac{du}{s + a}$ ,

sehingga diperoleh :

$$k_1^*(s) = \frac{a^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s+a}\right)^{n-1} \frac{du}{s+a} = \left(\frac{a}{s+a}\right)^n$$

Selanjutnya

$$L\{k_2(z)\} = L\left\{\frac{e^{-bz} b^m z^{m-1}}{\Gamma(m)}\right\}, \quad k_2^*(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-sz} e^{-bz} b^m z^{m-1}}{\Gamma(m)} dz$$

$$k_2^* \lambda = \frac{b^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+b)z} z^{m-1} dz. \tag{3.12}$$

Untuk mencari integral persamaan (3.12) akan dimisalkan  $v = (\lambda + b)z$  dengan  $dz = \frac{dv}{\lambda + b}$ , sehingga diperoleh :

$$k_2^* \lambda = \frac{b^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-v} \left(\frac{v}{\lambda+b}\right)^{m-1} \frac{dv}{\lambda+b} = \left(\frac{b}{\lambda+b}\right)^m.$$

Jadi, dari persamaan (4.12) dan persamaan (4.13) diperoleh:

$$k_1^* \lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-az} a^n z^{n-1}}{\Gamma(n)} = \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n \tag{3.13}$$

$$k_1^* \lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-bz} b^m z^{m-1}}{\Gamma(m)} = \left(\frac{b}{b+\lambda}\right)^m$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.13) kedalam persamaan (3.9) diperoleh

$$\lambda^2 + a_1 a_2 \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)^n \left(\frac{b}{b+\lambda}\right)^m = 0 \tag{3.14}$$

$$g(\lambda) = \lambda^2 + \lambda^n + \lambda^m + a_1 a_2 a^n b^m = 0. \tag{3.15}$$

Persamaan (3.15) diderivatifkan terhadap  $\lambda$  diperoleh:

$$g'(\lambda) = 2\lambda + n a + \lambda^{n-1} b + \lambda^{m-1} + \lambda^{2n-1} b + \lambda^{2m-1} + \lambda^{2n+m-1} m b + \lambda^{m-1} \\ = \lambda^{n-1} + \lambda^{m-1} + \lambda^{2n-1} n a + \lambda^{2n-1} b + n \lambda^{n-1} + m \lambda^{m-1} \tag{3.16}$$

Misalkan

$$\Phi(\lambda) = 2\lambda + n a + \lambda^{n-1} b + \lambda^{m-1} + m \lambda^{m-1} \tag{3.17}$$

sehingga persamaan (3.16) menjadi

$$g'(\lambda) = \lambda^{n-1} + \lambda^{m-1} + \Phi(\lambda) \tag{3.18}$$

Berdasarkan persamaan (3.18) diperoleh bahwa jika  $\lambda = -a, -b$  dan  $0$ , maka  $g'(\lambda) = 0$ . Hal ini berarti laju pertumbuhan populasi prey-predator akan setimbang. Lebih lanjut menurut persamaan (3.15) diperoleh  $g'(\lambda) < 0$  pada interval  $-a, 0$  atau  $(-b, -a)$ . Ini juga berarti jumlah populasi prey akan menurun, sehingga berpengaruh terhadap penurunan jumlah populasi predator akibat kurangnya sumber bahan makanan utama yang bersumber dari populasi prey. Lebih lanjut, keadaan titik kesetimbangan  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$  kedua populasi menunjukkan stabil

asimtotik. Kestabilan asimtotik ini ditunjukkan oleh  $\lambda$  yang mempunyai nilai-nilai eigen real negatif.

Selanjutnya, jika diambil  $\lambda_1 = -a$  dan  $\lambda_2 = -b$  persamaan (3.4) menjadi

$$u_1(t) = A_1 e^{-at} \\ u_2(t) = A_2 e^{-bt}, \tag{3.19}$$

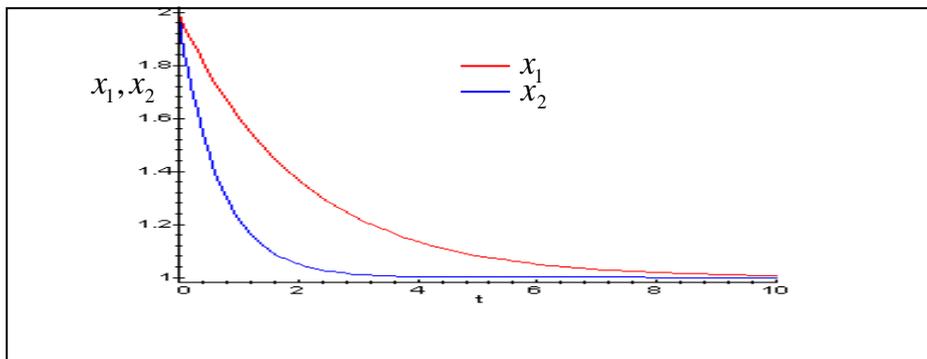
sehingga berdasarkan persamaan (3.2) dan persamaan (3.19) disekitar titik kesetimbangan  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$

diperoleh bahwa asumsi solusi dari persamaan (3.1) adalah

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a_2}{\alpha_2} + A_1 e^{-at} \\ x_2(t) &= \frac{a_1}{\alpha_1} + A_2 e^{-bt} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Karena pada saat  $\lambda = 0$  dicapai, kerapatan populasi prey dan predator akan mencapai garis asimtot atau berlangsung stasioner tanpa ada perubahan (yang merupakan titik kesetimbangannya), sehingga pada akhirnya pertumbuhan kedua populasi berhenti. Oleh karena itu, untuk  $\lambda = 0$  akan diabaikan.

Lebih jelasnya, dinamika pertumbuhan  $x_1$  dan  $x_2$  terhadap waktu  $t$  akibat waktu tunda dengan adanya pengaruh  $u_1(t)$  dan  $u_2(t)$  dengan berdasarkan persamaan (3.20) dapat ditunjukkan dengan grafik berikut :



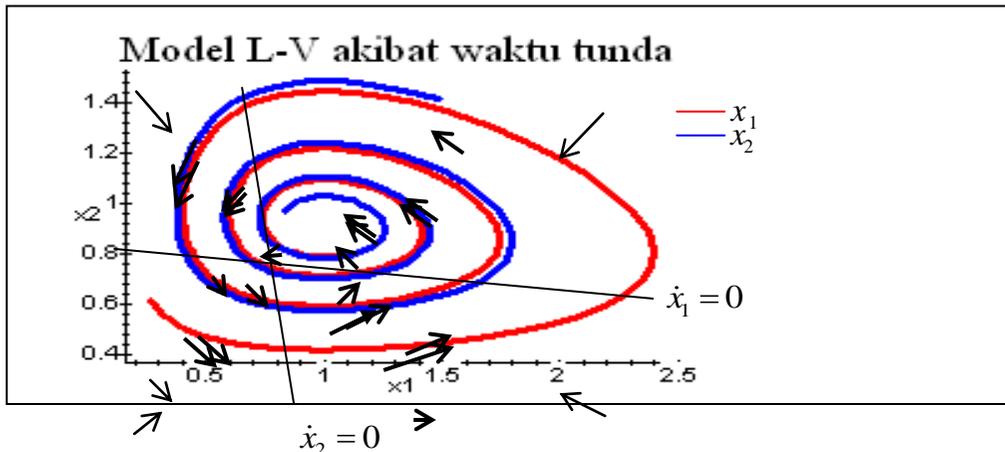
Gambar 1. Simulasi  $x_1$  dan  $x_2$  di titik  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$  dengan  $a_1 = \alpha_1 = 1$ ,  $a_2 = \alpha_2 = 0,3$ ,  $a = 0,5$ ,  $b = 1,5$ , dan

$A_1 = A_2 = 1$ .

Berdasarkan Gambar 1, menunjukkan  $x_1$  dan  $x_2$  keseimbangannya stabil asimtotik tanpa osilasi. Analisis menunjukkan untuk setiap konstanta  $a_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha_2$ ,  $a$ , dan  $b$  berlaku sifat kesetimbangan yang stabil asimtotik di  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$ .

Lebih lanjut, berdasarkan gambar 1, tidak terjadi isolasi pada dinamika perumbuhan populasi prey dan predator. Laju pertumbuhan yang tidak berisolasi ini disebabkan oleh saling ketergantungan antara keduanya. Jumlah populasi predator yang ada dipengaruhi oleh jumlah populasi prey. Kemudian dari gambar 1 terlihat juga bahwa pertumbuhan populasi predator lebih cepat menuju ke titik kesetimbangan  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$  dari pada populasi prey.

Lebih lanjut, prilaku sifat solusi kesetimbangan persamaan prey-predator akan digunakan analisis bidang fase berikut :



Gambar 2. Simulasi sistem persamaan L-V akibat waktu tunda dengan  $a_1 = \alpha_1 = 1$ ,  $a_2 = \alpha_2 = 0,3$  dan nilai awal  $x_1(0)=1.2$ ;  $x_2(0) = 1,7$ .

Berdasarkan gambar 2 terlihat bahwa trayektori dari model tersebut berbentuk memilin yang mengarah ke dalam atau ke titik  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$ . Hal ini berarti simulasi menunjukkan trayektori menuju ke titik kesetimbangannya, sehingga berdasarkan Definisi 2.3.2, titik  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$  merupakan titik yang stabil asimtotik.

#### IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa laju perubahan pertumbuhan predator lebih cepat menuju ke titik kesetimbangan  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$  dibandingkan dengan laju perubahan pertumbuhan populasi prey. Sementara itu, titik  $(\frac{a_2}{\alpha_2}, \frac{a_1}{\alpha_1})$  bersifat stabil asimtotik.

#### V. DAFTAR PUSTAKA

1. Boyce, E.W. and Diprima, R.C., 1997, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons Inc., New York.
2. Burger, D.N., Borrie, M.S., 1982, *Modelling with Differential Equations*, John Wiley & Sons. Inc.
3. Kapur, J.N., 2000, *Mathematical Models in Biology and Medicine*, Affiliated East-West Press Private Limited., New Delhi.
4. Kreyzig, E, 1999, *Advance Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons. Inc.
5. Nafyeh, A.H. and Balachandra, B., 1995, *Applied Nonlinear Dynamic: Analytical, Computational, and Experimental Method*, John Wiley & Sons Inc., New York.
6. Ross, S.L., 1984, *Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc.
7. Santosa,W., Pamuntjak, R.J., 1990, *Persamaan Diferensial Biasa*, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Jakarta