

METODE ELEMEN BATAS UNTUK MASALAH TRANSPORT

Agusman Sahari.¹

¹Jurusan Matematika FMIPA UNTAD Kampus Bumi Tadulako Tondo Palu

Abstrak

Dalam paper ini mendeskripsikan tentang solusi masalah transport polutan dalam medium anisotropik dengan metode elemen batas. Metode ini dibangun dari persamaan integral batas dengan mentransformasi persamaan pengatur $\lambda_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} - v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$ menjadi persamaan integral.

Hasil komputasi numerik yang diperoleh dengan menggunakan MEB cukup akurat.

Kata Kunci : metode elemen batas, transport polutan, medium anisotropik.

I. Pendahuluan

Metode elemen batas (selanjutnya disingkat dengan MEB) merupakan teknik pengembangan metode numerik untuk memecahkan masalah-masalah ilmu pengetahuan dan keteknikan. Metode ini didasari oleh persamaan Integral Batas (*Boundary Integral Equation*) dengan mentransformasi persamaan pengatur yang berupa persamaan differensial menjadi suatu persamaan integral.

Saat ini, MEB merupakan bidang yang sangat aktif dipelajari oleh komunitas science dan engineer, terutama masalah anisotropik, dan mengalami kemajuan yang sangat pesat dalam penelitian dan aplikasi secara luas. MEB memberikan tawaran signifikan terhadap metode sebelumnya, yaitu Finite Elemen Method (FEM), terutama dalam akurasi yang terkait dengan domain tak terhingga dan keunikan fiturnya dalam hal pengurangan dimensi masalah. Tawaran paling penting dari MEB adalah bahwa metode ini hanya perlu menggunakan diskritisasi permukaan saja. Hal ini sangat memudahkan dalam perancangan ulang dari produk-produk yang muncul dalam bentuk serial.

Metode BIE telah diaplikasikan dalam permasalahan hamburan dan penalaran gelombang untuk memperoleh solusi analitik untuk kelas yang sangat terbatas, bergantung pada tipe analisisnya. Penggunaan BIE secara numerik untuk memperoleh solusi masalah transport merupakan bagian dari pengembangan BEM selanjutnya.

II. Pernyataan Masalah

II.1 Persamaan Pengatur

Secara umum persamaan pengatur untuk system konduksi-konveksi steady (tidak berubah terhadap waktu) 2-D dalam suatu media anisotropik yang homogen dengan asumsi bahwa tidak terdapat sumber pembangkit dalam media adalah

$$\lambda_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} - v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

dimana ϕ berupa temperatur, x_i komponen koordinat titik, λ_{ij} konstanta konduktivitas/difusivitas, v_i komponen vektor kecepatan konstan v pada proses konveksi, dan indeks $ij = 1,2$. Matriks koefisien $[\lambda_{ij}]$ merupakan matriks bilangan real definit positif dan simetris. Suku pertama diruas kiri pers (1)

merepresentasikan proses konduksi, sedangkan suku keduanya menggambarkan proses konveksi dari system. Juga pada pers.(1) penjumlahan untuk indeks yang berulang berlaku sehingga secara eksplisit pers.(1) berbentuk :

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} - v_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 \quad (2)$$

II.2 Syarat Batas/Domain

Solusi ϕ dari pers.(1) akan valid dalam suatu domain Ω di ruang R^2 dengan batas domain Γ yang terdiri dari sejumlah berhingga kurva mulus bagian demi bagian. Pada Γ salah satu dari $\phi(x)$ atau

$$P(x) = \lambda_{ij} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} n_j(x)$$

diketahui, dimana $x=(x_1, x_2)$, n_j melambangkan komponen vektor normal satuan n mengarah ke luar di batas domain Γ . Metode solusi yang dipakai bekerja dengan cara menurunkan suatu persamaan integral batas yang relevan untuk persamaan differensial (1), dimana nilai numerik ϕ dan turunannya dapat ditentukan untuk semua titik dalam domain Ω .

III. Persamaan Integral Batas

Bila kedua ruas dari pers.(1) dikalikan dengan fungsi ϕ^* lalu diintegrasikan pada domain Ω ,

$$\text{maka } \int_{\Omega} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} - v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \phi^* dx = 0 \quad (3)$$

Dengan menggunakan Teorema Divergensi Gauss pada (3), diperoleh

$$\int_{\Gamma} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_j - \phi v_i n_i \right) \phi^* dx - \int_{\Omega} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_j} - \phi v_i \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} \right) dx = 0 \quad (4)$$

Sekali lagi dengan penggunaan Teorema Divergensi Gauss pada (4) untuk integran pertamanya akan menghasilkan

$$\int_{\Gamma} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_j - \phi v_i n_i \right) \phi^* dx - \int_{\Gamma} \phi \lambda_{ij} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} n_j dx + \int_{\Omega} \left(\phi \lambda_{ij} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x_i \partial x_j} + \phi v_i \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} \right) dx = 0 \quad (5)$$

$$\text{atau } \int_{\Omega} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x_i \partial x_j} + v_i \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} \right) \phi dx = - \int_{\Gamma} [P \phi^* - (P_v \phi^* + P^*) \phi] dx \quad (6)$$

Dimana : $P_v = v_i n_i$ dan $P^* = \lambda_{ij} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} n_j$

Jika fungsi ϕ^* diambil sedemikian sehingga memenuhi

$$\lambda_{ij} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x_i \partial x_j} + v_i \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} = -\delta(x - \xi) \quad (7)$$

Dimana $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ dan δ adalah fungsi delta direc, maka persamaan(1.6) dapat ditulis sebagai

$$\int_{\Omega} \phi(x) \delta(x - \xi) dx = \int_{\Gamma} [P(x) \phi^*(x - \xi) - (P_v(x) \phi^*(x - \xi) + P^*(x - \xi)) \phi(x)] dx \quad (8)$$

$$\text{atau } \eta(\xi) \phi(\xi) = \int_{\Gamma} [P(x) \phi^*(x - \xi) - (P_v(x) \phi^*(x - \xi) + P^*(x - \xi)) \phi(x)] dx \quad (9)$$

dimana $\eta = \frac{1}{2}$ bila ξ berada pada batas domain Γ , $\eta = 1$ bila ξ berada dalam domain Ω dan $\eta = 0$ bila ξ berada diluar domain Ω .

III.1 Diskritisasi

Misalkan domain Ω didekati oleh suatu polygon dengan sejumlah M elemen, sehingga Γ terdiri atas elemen-elemen garis lurus $\Gamma^{(m)} = [q^{(m-1)}, q^{(m)}]$, $m = 1, 2, \dots, M$ dimana $q^{(m-1)}$ dan $q^{(m)}$ adalah titik-titik ujung awal dan akhir dari elemen $\Gamma^{(m)}$, maka Pers. (9) dapat ditulis sebagai

$$\eta(\xi) \phi(\xi) \approx \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma^{(m)}} \{P(x) \phi^*(x, \xi) - [P_v(x) \phi^*(x, \xi) + P^*(x, \xi)] \phi(x)\} dx \quad (10)$$

Selanjutnya, bila kita mengasumsikan bahwa pada setiap elemen $\Gamma^{(m)}$ nilai ϕ dan P konstan, dan masing-masing diwakili oleh nilainya pada titik tengah $\bar{q}^{(m)} = (q^{(m-1)} + q^{(m)})/2$ dari elemen tertentu $\Gamma^{(m)}$, maka Pers. (10) dapat ditulis sebagai

$$\eta(\xi)\phi(\xi) \approx \sum_{m=1}^M \left\{ P(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} \phi^*(x, \xi) dx - \phi(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} [P_v(x)\phi^*(x, \xi) + P^*(x, \xi)] dx \right\} \quad (11)$$

Sebagaimana disebutkan pada Pasal 3.3, pada suatu elemen $\Gamma^{(m)}$ hanya salah satu dari ϕ dan P diketahui. Bila nilai $\phi(\bar{q}^{(m)})$ diberikan maka nilai $P(\bar{q}^{(m)})$ menjadi unknown di $\Gamma^{(m)}$. Sebaliknya, bila pada elemen $\Gamma^{(m)}$ nilai $P(\bar{q}^{(m)})$ diberikan maka nilai $\phi(\bar{q}^{(m)})$ menjadi unknown.

Titik ξ diposisikan pada batas domain Γ . Pers. (11) kemudian dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{2}\phi(\bar{q}^{(l)}) \approx \sum_{m=1}^M \left\{ P(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} \phi^*(x, \bar{q}^{(l)}) dx - \phi(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} [P_v(x)\phi^*(x, \bar{q}^{(l)}) + P^*(x, \bar{q}^{(l)})] dx \right\} \quad (12)$$

Untuk $l = 1, 2, \dots, M$. Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$\frac{1}{2}\phi^{(l)} + \sum_{m=1}^M \hat{F}^{(lm)} \phi^{(m)} \approx \sum_{m=1}^M G^{(lm)} P^{(m)} \quad (13)$$

Dimana $\phi^{(m)} = \phi(\bar{q}^{(m)})$, $P^{(m)} = P(\bar{q}^{(m)})$, dan

$$\hat{F}^{(lm)} = \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} [P_v(x)\phi^*(x, \bar{q}^{(l)}) + P^*(x, \bar{q}^{(l)})] dx \quad (14)$$

$$G^{(lm)} = \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} \phi^*(x, \bar{q}^{(l)}) dx \quad (15)$$

Lebih kompak, Pers. (13) dapat ditulis sebagai

$$\sum_{m=1}^M F^{(lm)} \phi^{(m)} \approx \sum_{m=1}^M G^{(lm)} P^{(m)} \quad (16)$$

$$\text{Dimana } F^{(lm)} = \begin{cases} \hat{F}^{(lm)} & \text{bila } l \neq m \\ \hat{F}^{(lm)} + \frac{1}{2} & \text{bila } l = m \end{cases}$$

Pers. (16) dapat diurutkan ulang dengan meletakkan di ruas kiri semua $\phi^{(m)}$ atau $P^{(m)}$ yang nilainya pada elemen ke- m tak diketahui, sehingga Pers.(16) dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks $AZ = B$ (17)

Dimana A matriks kofisien berukuran $M \times M$, Z dan B adalah matriks berukuran $M \times 1$ yang masing-masing memiliki entri

$$\begin{aligned} A^{(lm)} &= \begin{cases} F^{(lm)} & \text{bila } P \text{ diketahui pada elemen } \Gamma^{(m)} \\ -G^{(lm)} & \text{bila } \phi \text{ diketahui pada elemen } \Gamma^{(m)} \end{cases} \\ B^{(lm)} &= \begin{cases} \sum_{m=1}^M G^{(lm)} P^{(m)} & \text{bila } P \text{ diketahui pada elemen } \Gamma^{(m)} \\ -\sum_{m=1}^M F^{(lm)} \phi^{(m)} & \text{bila } \phi \text{ diketahui pada elemen } \Gamma^{(m)} \end{cases} \\ B^{(lm)} &= \begin{cases} \phi^{(m)} & \text{bila } P \text{ diketahui pada elemen } \Gamma^{(m)} \\ P^{(m)} & \text{bila } \phi \text{ diketahui pada elemen } \Gamma^{(m)} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Persamaan (17) bersama Pers. (18) merupakan suatu Sistem Persamaan Aljabar Linier (SPAL) dengan M persamaan dan M unknown. Sekali nilai ϕ dan P pada batas domain Γ telah diketahui, maka kita bisa menentukan nilai ϕ dan turunannya pada sebarang titik dalam ξ dengan menggunakan Pers. (11), yakni

$$\phi(\xi) \approx \sum_{m=1}^M \left\{ P(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} \phi^*(x, \xi) dx - \phi(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} [P_v(x)\phi^*(x, \xi) + P^*(x, \xi)] dx \right\} \quad (19)$$

Selain itu dapat pula ditentukan nilai turunan $\partial\phi/\partial\xi_1$ dan $\partial\phi/\partial\xi_2$ melalui persamaan berikut

$$\frac{\partial\phi(\xi)}{\partial\xi_1} \approx \sum_{m=1}^M \left\{ P(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} \frac{\partial\phi^*(x, \xi)}{\partial\xi_1} dx - \phi(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} \left[P_v(x) \frac{\partial\phi^*(x, \xi)}{\partial\xi_1} + \frac{\partial P^*(x, \xi)}{\partial\xi_1} \right] dx \right\} \quad (20)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} \approx \sum_{m=1}^M \left\{ P(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} \frac{\partial\phi^*(x, \xi)}{\partial\xi_2} dx - \phi(\bar{q}^{(m)}) \int_{q^{(m-1)}}^{q^{(m)}} \left[P_v(x) \frac{\partial\phi^*(x, \xi)}{\partial\xi_2} + \frac{\partial P^*(x, \xi)}{\partial\xi_2} \right] dx \right\}$$

IV. Hasil Numerik

IV.1 Masalah Uji

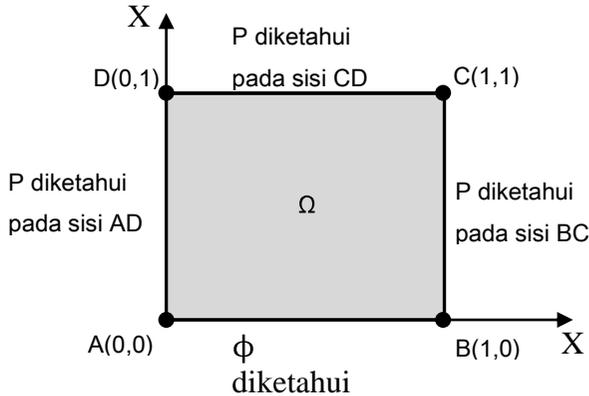
Solusi analitik untuk persamaan (1) sebagai berikut :

$$\phi = \exp (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \tag{21}$$

dimana α_1 dan α_2 adalah bilangan riil yang memenuhi

$$\lambda_{22}\alpha_2^2 + (2\lambda_{12}\alpha_1 - v_2)\alpha_2 + (\lambda_{11}\alpha_1^2 - v_1\alpha_1) = 0 \tag{22}$$

dan geometri medium dan syarat batas masalahnya diilustrasikan pada gambar berikut:



Gambar 1: Geometri dari masalah uji

λ_{ij} merupakan koefisien konduktivitas dari suatu medium fluida yang diasumsikan anisotropik ($\lambda_{11} \neq \lambda_{22}$) dan v_i adalah kecepatan aliran polutan, yang diberikan oleh : $\lambda_{11} = 0.5$, $\lambda_{12} = 0.5$, $\lambda_{22} = 2$ dan $v_1 = 0.5$, $v_2 = 1$

P , yang dapat dihitung dari Pers.(21) yang diketahui pada sisi AD , BC dan CD ,

Φ , yang diberikan pada Pers (21) diketahui pada sisi AB . Jika diambil $\alpha_1 = 0.5$, maka α_2 dapat dihitung dari persamaan kuadrat (22).

Tabel 1. Solusi interior : untuk 80 elemen

Titik	Solusi MEB			Solusi Eksak		
	phi	phi1	phi2	phi	phi1	phi2
0.1000 0.5000	0.9746	0.4856	-0.1497	0.9731	0.4866	-0.1504
0.3000 0.5000	1.0767	0.5369	-0.1654	1.0755	0.5377	-0.1662
0.5000 0.5000	1.1897	0.5942	-0.1831	1.1886	0.5943	-0.1836
0.7000 0.5000	1.3147	0.6569	-0.2025	1.3136	0.6568	-0.2030
0.9000 0.5000	1.4529	0.7268	-0.2246	1.4517	0.7259	-0.2243

Solusi interior :160 elemen

Titik	Solusi MEB			Solusi Eksak		
	phi	phi1	phi2	phi	phi1	phi2
0.1000 0.5000	0.9738	0.4862	-0.1501	0.9731	0.4866	-0.1504
0.3000 0.5000	1.0760	0.5375	-0.1659	1.0755	0.5377	-0.1662
0.5000 0.5000	1.1891	0.5943	-0.1834	1.1886	0.5943	-0.1836
0.7000 0.5000	1.3141	0.6569	-0.2028	1.3136	0.6568	-0.2030
0.9000 0.5000	1.4523	0.7263	-0.2244	1.4517	0.7259	-0.2243

Solusi interior : 320 elemen

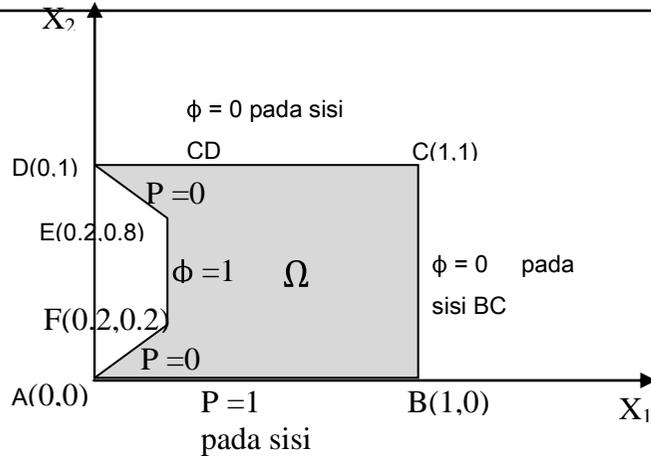
Titik	Solusi MEB			Solusi Eksak		
	phi	phi1	phi2	phi	phi1	phi2
0.1000 0.5000	0.9734	0.4864	-0.1502	0.9731	0.4866	-0.1504
0.3000 0.5000	1.0757	0.5377	-0.1660	1.0755	0.5377	-0.1662
0.5000 0.5000	1.1888	0.5943	-0.1835	1.1886	0.5943	-0.1836
0.7000 0.5000	1.3139	0.6569	-0.2029	1.3136	0.6568	-0.2030
0.9000 0.5000	1.4520	0.7261	-0.2243	1.4517	0.7259	-0.2243

$$\text{phi1} = d(\text{phi})/d(x1); \text{ phi2} = d(\text{phi})/d(x2)$$

Tabel 1. Memperlihatkan perbandingan antara solusi MEB dan solusi analitik. Dapat diamati bahwa solusi MEB konvergen ke solusi analitik, hal ini dapat dilihat saat meningkatnya jumlah elemen dari 80, 160 dan 320, artinya bahwa semakin kecil selang integral yang digunakan maka semakin akurat aproksimasi integrasi numerik yang akan diperoleh. Hasil ini sesuai yang diharapkan.

IV.2 Masalah Tanpa Solusi Analitik

Masalah transportasi dan dispersi polutan yang diatur oleh Pers. (1) pada suatu medium fluida yang anisotropik ($\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{12} = 0.5$, $\lambda_{22} = 2$) serta geometri dan syarat batas seperti diperlihatkan pada Gambar 2.



Gambar 2: Geometri dari masalah transportasi polutan

Dengan kecepatan aliran polutan $v_1 = 1$, $v_2 = 0$. Tidak tersedia solusi analitik untuk contoh masalah ini. Kita akan melihat pengaruh perubahan elemen.

Tabel 2. Solusi interior : untuk 180 elemen

Titik	Solusi MEB			Solusi Eksak		
	phi	phi1	phi2	phi	phi1	phi2
0.3000 0.5000	0.8181	-1.6257	-0.3923			
0.4000 0.5000	0.6735	-1.2884	-0.5495			
0.5000 0.5000	0.5558	-1.0878	-0.5656			
0.6000 0.5000	0.4524	-0.9962	-0.5074			
0.7000 0.5000	0.3535	-0.9942	-0.4068			
0.8000 0.5000	0.2507	-1.0764	-0.2800			
0.9000 0.5000	0.1354	-1.2432	-0.1395			

Solusi interior : untuk 300 elemen

Titik	Solusi MEB			Solusi Eksak		
	phi	phi1	phi2	phi	phi1	phi2
0.3000 0.5000	0.8180	-1.6214	-0.3915			
0.4000 0.5000	0.6738	-1.2868	-0.5491			
0.5000 0.5000	0.5561	-1.0875	-0.5655			
0.6000 0.5000	0.4527	-0.9964	-0.5074			
0.7000 0.5000	0.3539	-0.9946	-0.4069			
0.8000 0.5000	0.2510	-1.0768	-0.2801			

0.9000 0.5000 0.1357 -1.2435 -0.1397

Solusi interior : 420 elemen

Titik	Solusi MEB			Solusi Eksak		
	phi	phi1	phi2	phi	phi1	phi2
0.3000 0.5000	0.8180	-1.6203	-0.3909			
0.4000 0.5000	0.6738	-1.2865	-0.5484			
0.5000 0.5000	0.5562	-1.0874	-0.5651			
0.6000 0.5000	0.4528	-0.9963	-0.5071			
0.7000 0.5000	0.3539	-0.9945	-0.4068			
0.8000 0.5000	0.2511	-1.0767	-0.2801			
0.9000 0.5000	0.1358	-1.2434	-0.1397			

$\phi_1 = d(\phi)/d(x_1); \phi_2 = d(\phi)/d(x_2)$

Tabel 2. Memperlihatkan solusi MEB dengan menggunakan 180, 300 dan 420 elemen. Dari tabel ini dapat diamati bahwa dengan peningkatan jumlah elemen, solusi konvergen ke suatu nilai tertentu, hal ini didasari bahwa semakin banyak partisi dalam suatu selang maka aproksimasi integrasi numerik akan semakin akurat.

V. KESIMPULAN

Suatu MEB untuk solusi masalah nilai batas transport polutan dalam suatu medium anisotropik telah ditemukan. MEB ini cukup mudah untuk diimplementasikan untuk memperoleh solusi numerik untuk masalah transport polutan dalam suatu medium anisotropik. Hasil komputasi numerik yang diperoleh dengan menggunakan MEB ini mengindikasikan bahwa MEB ini dapat menghasilkan solusi numerik yang akurat.

VI. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Azis M. I. *Mengenal Metode Elemen Batas dan Aplikasinya*.
- [2] Belkhatay A. P. *Interval Boundary Element Method for 2D Transient Diffusion Problem*. Elsevier Ltd. 2007
- [3] Kreyszig E. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons Inc., New York. 1999
- [4] Nakhle H. A. *Partial Differential Equations With Fourier Series and Boundary Value Problem*. Person Prentice Hall. New Jersey. 2005.