

KESTABILAN MODEL MATEMATIKA INFEKSI PRIMER PENYAKIT *VARICELLA* DAN INFEKSI REKUREN PENYAKIT *HERPES ZOSTER* OLEH VIRUS *VARICELLA ZOSTER*

Hardiyanti¹, R. Ratianingsih², dan Hajar³

^{1,2,3}Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako
Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia.

¹hardiyanti17sept96@gmail.com, ²ratianingsih@yahoo.com, ³hajar.200490@yahoo.com

ABSTRACT

Varicella and *herpes zoster* are two infectious skin diseases of human that caused by *varicella zoster* virus, where *varicella* disease is a primary infection that often infected younger people while *herpes zoster* disease is a recurrent disease that often infected older people because of reactivation of latent *varicella-zoster* virus. If the pain caused by *herpes zoster* after recurrent phase is appeared then the condition is known as *postherpetic neuralgia*. This study builds a mathematical model of primary infection (*varicella* disease) and recurrent infection (*herpes zoster* disease) developed from the SIR model (Susceptible, Infected, Recovered). The human population is divided into seven subpopulations, namely susceptible, infection, recovered of *varicella*, *herpes zoster* and *postherpetic neuralgia* subpopulation. Stability analysis at the critical point by linearization method gives a critical point T_1 that guaranteed to exist and unstable if $\alpha < \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$. Means that the disease-free condition occur with a small rate of infection and this condition could be maintained for a long period of the time. The model have two respectively critical points T_1 and T_2 that represent an endemic disease-free conditions. The existence of T_2 occurs if $\alpha > \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$, while the critical point T_1 does not have any requirement. Stability analysis at the endemic disease-free critical point is represented T_1 that will be unstable if T_2 exist and stable T_1 if T_2 exist. Numerical simulations by simulated to describe such temporary disease-free conditions and an endemic stable conditions.

Keywords : *Herpes Zoster Disease, Method Of Linearization, Post Herpetic Neuralgia, Routh Hurwitz, Varicella Disease.*

ABSTRAK

Varicella dan *herpes zoster* adalah dua penyakit kulit menular pada manusia yang disebabkan oleh virus yang sama, yaitu virus *varicella zoster*. Penyakit *varicella* merupakan infeksi primer yang sering dijumpai pada usia muda dan penyakit *herpes zoster* merupakan infeksi rekuren yang sering dijumpai pada usia tua akibat reaktifasi dari virus *varicella zoster* yang bersifat laten. Jika timbul rasa sakit yang disebabkan oleh *herpes zoster* setelah fase rekuren maka kondisi ini disebut *post herpetic neuralgia* (nyeri pasca herpetik). Penelitian ini membangun model matematika dari infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) dengan mengadaptasi model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*). Populasi manusia dibagi dalam tujuh subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan, infeksi, sembuh untuk masing-masing penyakit *varicella* dan *herpes zoster* serta subpopulasi *post herpetic neuralgia*. Analisa kestabilan di titik kritis dari model tersebut dengan metode linearisasi

memberikan satu titik kritis T_1 dijamin eksis dan tidak stabil jika $\alpha < \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$. Hal ini memberikan arti bahwa kondisi bebas penyakit terjadi dengan laju infeksi yang kecil dan kondisi ini tidak bisa dipertahankan untuk jangka waktu yang lama. Model memiliki dua titik kritis T_1 dan T_2 yang berturut-turut menggambarkan kondisi bebas penyakit dan endemik. Eksistensi T_2 dipenuhi jika $\alpha > \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$, sedangkan titik kritis T_1 tidak memiliki syarat eksistensi. Analisis kestabilan pada titik kritis bebas penyakit dan endemik dengan kriteria Routh Hurwitz menunjukkan bahwa titik kritis T_1 tidak stabil jika T_2 eksis dan T_1 stabil jika T_2 eksis. Simulasi numerik yang dilakukan untuk menggambarkan kondisi bebas penyakit yang bersifat sementara, serta kondisi endemik yang stabil bersifat menetap.

Kata Kunci : Penyakit *Herpes Zoster*, Metode Linearisasi, *Post Herpetic Neuralgia*, Routh Hurwitz, Penyakit *Varicella*.

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Kesehatan masyarakat di Indonesia pada waktu itu dimulai dengan adanya upaya pemberantasan penyakit *varicella* dan *kolera* yang sangat ditakuti masyarakat. *Kolera* masuk di Indonesia tahun 1927, dan tahun 1937 terjadi wabah *kolera eltor* di Indonesia. Pada tahun 1948 penyakit *varicella* masuk ke Indonesia melalui Singapura dan mulai berkembang di Indonesia sehingga pemerintah Belanda pada waktu itu melakukan upaya-upaya kesehatan masyarakat seperti memberikan penyuluhan dan pelayanan kesehatan masyarakat.

Di Indonesia, penyakit *varicella* biasa dikenal dengan cacar air. Penyakit *varicella* disebabkan oleh virus *varicella zoster* yang juga berkaitan dengan dua infeksi klinis utama pada manusia yaitu penyakit *varicella* dan *herpes zoster*. Penyakit *varicella* merupakan infeksi primer yang terjadi pertama kali pada individu yang berkontak dengan virus *varicella zoster*. Pada 3 sampai 5 individu dari 100 individu, virus *varicella zoster* mengalami reaktivitas yang menyebabkan infeksi berulang (rekuren) yang kemudian dikenal dengan *herpes zoster* atau cacar ular. Virus *varicella zoster* merupakan salah satu dari delapan virus *herpes zoster* yang menyebabkan infeksi pada manusia (NCIRS, 2009). Pada beberapa kasus pada *herpes zoster* dapat terjadi komplikasi neurologi yang disebut dengan *post herpetic neuralgia*. Insiden meningkatnya *post herpetic neuralgia* yaitu dengan bertambahnya umur dimana lebih kurang 50% penderita *post herpetic neuralgia* berusia lebih dari 60 tahun. *Post herpetic neuralgia* biasanya jarang terjadi pada anak (Lubis, 2008).

Penelitian mengkaji dan membangun model dua infeksi klinis utama yang disebabkan oleh virus *varicella zoster* yang dikenal sebagai penyakit *varicella* dan penyakit *herpes zoster*. Model matematika yang dibangun pada penelitian ini diadaptasi dari model SIR sehingga yang dilakukan dengan membagi populasi dalam subpopulasi rentan, terinfeksi, sembuh baik pada penyakit *varicella* maupun penyakit *herpes zoster* serta *post herpetic neuralgia*. Model yang dibangun dengan mengambil asumsi berdasarkan fenomena penyebaran penyakit dan

karakter penyakit *varicella*, *herpes zoster* dan *post herpetic neuralgia*. Model yang telah dibangun diuji kestabilannya di titik kritisnya menggunakan metode linearisasi dan Routh-Hurwitz.

1.2. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model matematika infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster*?
2. Bagaimana kestabilan dari model matematika infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster*?

1.3. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah penelitian ini adalah tingkat rekrutmen populasi manusia rentan bersifat tetap.

II. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan sesuai prosedur dibawah ini :

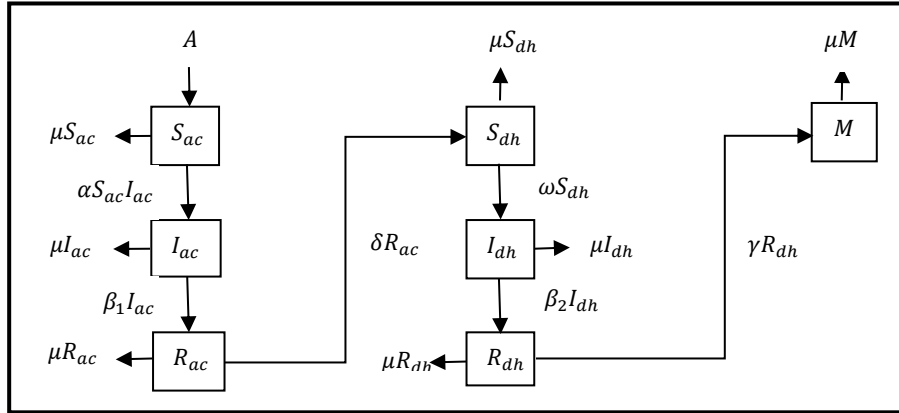
1. Mempersiapkan Penelitian
2. Membangun model matematika infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster*
3. Menentukan titik kritis model siklus infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster*
4. Menganalisis kestabilan model siklus infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster*
5. Simulasi infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster*
6. Menyimpulkan hasil penelitian

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Model Matematika Infeksi Primer Penyakit *Varicella* dan Infeksi Rekuren Penyakit *Herpes Zoster* Oleh Virus *Varicella Zoster*.

Dalam penelitian ini model matematika dibangun berdasarkan alur infeksi virus *varicella zoster*. Terdapat dua jenis infeksi, yaitu infeksi primer yang merupakan infeksi yang pertama kali terjadi pada usia muda sehingga menyebabkan penyakit *varicella* dan infeksi recurrent dimana virus *varicella zoster* kembali aktif di usia tua yang menyebabkan penyakit *herpes zoster*. Populasi manusia dalam penelitian ini diamati dalam dua phase yaitu fase muda dan fase tua. Pada fase muda, populasi manusia dibagi menjadi 3 subpopulasi yaitu subpopulasi manusia muda rentan terhadap penyakit *varicella* (S_{ac}), subpopulasi manusia muda terinfeksi penyakit *varicella* (I_{ac}) dan subpopulasi manusia muda yang sembuh dari penyakit

varicella (R_{ac}). Pada fase tua, populasi manusia dibagi menjadi 4 phase, yaitu subpopulasi manusia tua rentan terhadap penyakit *herpes zoster* (R_{ah}), subpopulasi manusia tua terinfeksi penyakit *herpes zoster* (I_{ah}), subpopulasi manusia tua sembuh dari penyakit *herpes zoster* (R_{dh}), dan subpopulasi manusia tua pada keadaan *post herpetic neuralgia* (M). Diagram kompartemen infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster* dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1 : Diagram Kompartemen

$$\begin{aligned} \frac{dS_{ac}}{dt} &= A - \alpha S_{ac} I_{ac} - \mu S_{ac} & (1) \\ \frac{dI_{ac}}{dt} &= \alpha S_{ac} I_{ac} - \beta_1 I_{ac} - \mu I_{ac} & (2) \\ \frac{dR_{ac}}{dt} &= \beta_1 I_{ac} - \delta R_{ac} - \mu R_{ac} & (3) \\ \frac{dS_{dh}}{dt} &= \delta R_{ac} - \omega S_{dh} - \mu S_{dh} & (4) \\ \frac{dI_{dh}}{dt} &= \omega S_{dh} - \beta_2 I_{dh} - \mu I_{dh} & (5) \\ \frac{dR_{dh}}{dt} &= \beta_2 I_{dh} - \gamma R_{dh} - \mu R_{dh} & (6) \\ \frac{dM}{dt} &= \gamma R_{dh} - \mu M & (7) \end{aligned}$$

Tabel 1 : Variabel Penelitian

Variable	Deskripsi
$S_{ac}(t)$	Populasi manusia muda rentan penyakit <i>varicella</i> pada saat t
$I_{ac}(t)$	Populasi manusia muda terinfeksi penyakit <i>varicella</i> pada saat t
$R_{ac}(t)$	Populasi manusia muda sembuh dari penyakit <i>varicella</i> pada saat t
$S_{dh}(t)$	Populasi manusia tua rentan penyakit <i>herpes zoster</i> pada saat t
$I_{dh}(t)$	Populasi manusia tua terinfeksi penyakit <i>herpes zoster</i> pada saat t
$R_{dh}(t)$	Populasi manusia tua sembuh dari penyakit <i>herpes zoster</i> pada saat t
M	Populasi manusia pada keadaan <i>post herpetic neuralgia</i> pada saat t

Tabel 2 : Parameter Penelitian

Parameter	Deskripsi	Nilai	Sumber
A	Tingkat rekrutmen manusia rentan	25	Asumsi
α	Laju infeksi akibat kontak antara rentan penyakit <i>varicella</i> dengan terinfeksi penyakit <i>varicella</i>	0,018	Syarat stabil dan syarat eksis
β_1	Laju kesembuhan penyakit <i>varicella</i>	0,085	MM Ofori
β_2	Laju kesembuhan penyakit <i>herpes zoster</i>	0,539	Ayuningati, L.K dan Indramaya, I.M
δ	Laju perubahan dari sembuh penyakit <i>varicella</i> menjadi rentan terhadap penyakit <i>herpes zoster</i>	0,9	Asumsi
ω	Laju infeksi penyakit <i>herpes zoster</i>	0,4	Ayuningati, L.K dan Indramaya, I.M
γ	Laju perubahan dari sembuh penyakit <i>herpes zoster</i> menjadi keadaan <i>post herpetic neuralgia</i>	0,1	Ayuningati, L.K dan Indramaya, I.M
μ	Tingkat kematian alami	0,66	1/ <i>lifetime</i>

3.2. Analisis Kestabilan Matematika Infeksi Primer Penyakit Varicella dan Infeksi Rekuren Penyakit Herpes Zoster Oleh Virus Varicella Zoster

Titik kritis dari sistem persamaan (1) – (7) dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan yaitu $S_{ac} = 0$, $I_{ac} = 0$, $R_{ac} = 0$, $S_{dh} = 0$, $R_{dh} = 0$, $I_{dh} = 0$, dan $M = 0$. Sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dS_{ac}}{dt} = A - \alpha S_{ac} I_{ac} - \mu S_{ac} \quad (8)$$

$$\frac{dI_{ac}}{dt} = \alpha S_{ac} I_{ac} - \beta_1 I_{ac} - \mu I_{ac} \quad (9)$$

$$\frac{dR_{ac}}{dt} = \beta_1 I_{ac} - \delta R_{ac} - \mu R_{ac} \quad (10)$$

$$\frac{dS_{dh}}{dt} = \delta R_{ac} - \omega S_{dh} - \mu S_{dh} \quad (11)$$

$$\frac{dI_{dh}}{dt} = \omega S_{dh} - \beta_2 I_{dh} - \mu I_{dh} \quad (12)$$

$$\frac{dR_{dh}}{dt} = \beta_2 I_{dh} - \gamma R_{dh} - \mu R_{dh} \quad (13)$$

$$\frac{dM}{dt} = \gamma R_{dh} - \mu M \quad (14)$$

Titik kritis yang dihasilkan (8), (9), (10), (11), (12), (13) dan (14) diperoleh dua titik kritis $T_i = (S_{aci}, I_{aci}, R_{aci}, S_{dhi}, I_{dhi}, R_{dhi}, M_i)$, $i = 1, 2$ yang dinyatakan dalam Tabel 3.

Tabel 3 : Titik Kritis

i	S_{aci}	I_{aci}
1	$\frac{A}{\mu}$	0
2	$\frac{\beta_1 + \mu}{\alpha}$	$\frac{A\alpha - \beta_1 - \mu^2}{\alpha(\beta_1 + \mu)}$

i	R_{aci}	S_{dhi}
1	0	0
2	$\frac{\beta_1(A\alpha - \beta_1 - \mu^2)}{\alpha(\beta_1 + \mu)(\mu + \delta)}$	$\frac{\delta\beta_1(A\alpha - \beta_1 - \mu^2)}{\alpha(\beta_1 + \mu)(\mu + \delta)(\mu + \omega)}$
i	I_{dhi}	R_{dhi}
1	0	0
2	$\frac{\omega\delta\beta_1(A\alpha - \beta_1 - \mu^2)}{\alpha(\beta_1 + \mu)(\mu + \delta)(\mu + \omega)(\beta_2 + \mu)}$	$\frac{\omega\delta\beta_1\beta_2(A\alpha - \beta_1 - \mu^2)}{\alpha(\beta_1 + \mu)(\mu + \delta)(\mu + \omega)(\beta_2 + \mu)(\mu + \gamma)}$
i	M_i	
1	0	
2	$\frac{\omega\delta\beta_1\beta_2(A\alpha - \beta_1 - \mu^2)}{\alpha(\beta_1 + \mu)(\mu + \delta)(\mu + \omega)(\beta_2 + \mu)(\mu + \gamma)}$	

3.3. Syarat Eksistensi Titik Kritis

Eksistensi suatu populasi direpresentasikan oleh setiap variabel $S_{ac}, I_{ac}, R_{ac}, S_{dh}, I_{dh}, R_{dh}, M$ dengan syarat agar bernilai non negatif. Titik kritis T_1 yang menggambarkan kondisi bebas penyakit dijamin eksis, karena $\frac{A}{\mu}$ bernilai positif. Sedangkan titik kritis T_2 yang menggambarkan kondisi endemik dijamin eksis jika $\alpha > \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$.

3.4. Analisis Kestabilan

3.4.1. Analisis Kestabilan Titik Kritis T_1

Titik kritis T_1 yang merepresentasikan kondisi bebas penyakit bukan titik nol, maka dilakukan transformasi. Untuk menjamin kestabilannya diperlukan nilai eigen λ yang diperoleh dari matriks Jacobi. Matriks Jacobi dari sistem persamaan diferensial (8)-(14) yang dievaluasi pada T_1 memberikan persamaan karakteristik dalam λ sebagai berikut :

$$-(-\mu - \lambda) \left(\frac{\alpha A}{\mu} - \mu - \beta_1 - \lambda \right) (-\delta - \mu - \lambda) (-\mu - \omega - \lambda) (\mu + \beta_2 + \lambda) (\gamma + \mu + \lambda) (\mu + \lambda) = 0 \quad (15)$$

Dari persamaan (15) diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -\delta - \mu, \lambda_2 = -\gamma - \mu, \lambda_3 = -\mu - \omega, \lambda_4 = -\mu - \beta_2, \lambda_5 = -\mu, \lambda_6 = -\mu, \lambda_7 = \frac{A\alpha - \mu^2 - \mu\beta_1}{\mu}$$

Dari nilai-nilai eigen tersebut terlihat bahwa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ bernilai negatif, sedangkan λ_7 akan bernilai negatif jika $\alpha > \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$ yang sekaligus merupakan syarat eksistensi T_2 . Sehingga disimpulkan bahwa T_1 adalah stabil jika T_2 eksis.

3.4.2. Analisis Kestabilan Titik Kritis T_2

Titik kritis T_2 yang merepresentasikan kondisi endemik bukan titik nol, maka dilakukan transformasi. Untuk menjamin kestabilannya diperlukan nilai eigen λ yang diperoleh dari matriks Jacobi. Matriks Jacobi dari sistem persamaan diferensial (8)-(14) yang dievaluasi pada T_2 memberikan persamaan karakteristik dalam λ sebagai berikut :

$$-\frac{(\delta + \mu + \lambda)(\mu + \omega + \lambda)(\mu + \beta_2 + \lambda)(\gamma + \mu + \lambda)(\mu + \lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c}{\mu + \beta_1} = 0 \quad (16)$$

Dari persamaan (16) diperoleh $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\delta - \mu$, $\lambda_3 = -\gamma - \omega$, $\lambda_4 = -\mu - \omega$, $\lambda_5 = -\mu - \beta_2$ sehingga untuk nilai eigen λ_6 dan λ_7 akan diidentifikasi menggunakan metode Routh Hurwitz pada persamaan karakteristik $-\alpha\lambda^2 - b\lambda - c = 0$. Masing-masing koefisien karakteristik $-\alpha\lambda^2 - b\lambda - c = 0$ dikalikan -1 untuk menghasilkan koefisien-koefisien persamaan karakteristik yang bernilai positif, sehingga $-\alpha\lambda^2 - b\lambda - c = 0$ menjadi $\alpha\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Dimana : $\alpha = \mu + \beta_1$, $b = A\alpha$ dan $c = A\alpha\mu + A\alpha\beta_1 - \mu^3 - 2\mu^2\beta_1 - \mu\beta_1^2$

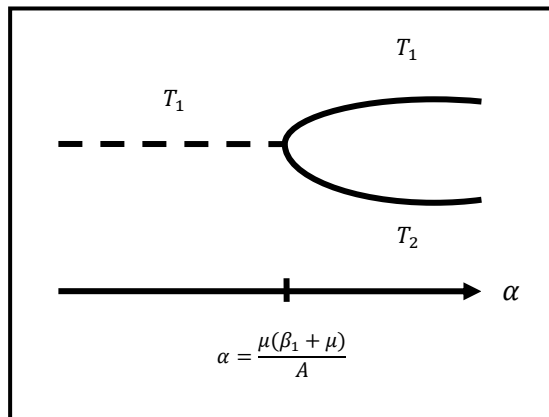
Tabel 4 : Routh Hurwitz

λ^2	a	c	0
λ^1	b	0	0
λ	c	0	0

Titik kritis T_2 stabil apabila semua suku kolom pertama bertanda sama, karena a dan b positif maka c haruslah positif. Agar c positif maka $\alpha > \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$.

3.4.3. Sensitifitas Titik Kritis Terhadap Perubahan Nilai α

Analisa eksistensi dan kestabilan T_1 dan T_2 pada sistem dipengaruhi oleh perubahan nilai α . Gambar 2 memperlihatkan bahwa sistem yang pada mulanya memiliki satu titik kritis T_1 yang tidak stabil jika $\alpha < \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$, setelah $\alpha > \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$ akan memiliki dua titik kritis T_1 dan T_2 yang stabil. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem hanya akan memiliki satu titik kritis yang tidak stabil bila T_2 tidak eksis dan sistem akan memiliki dua titik kritis stabil jika T_2 eksis



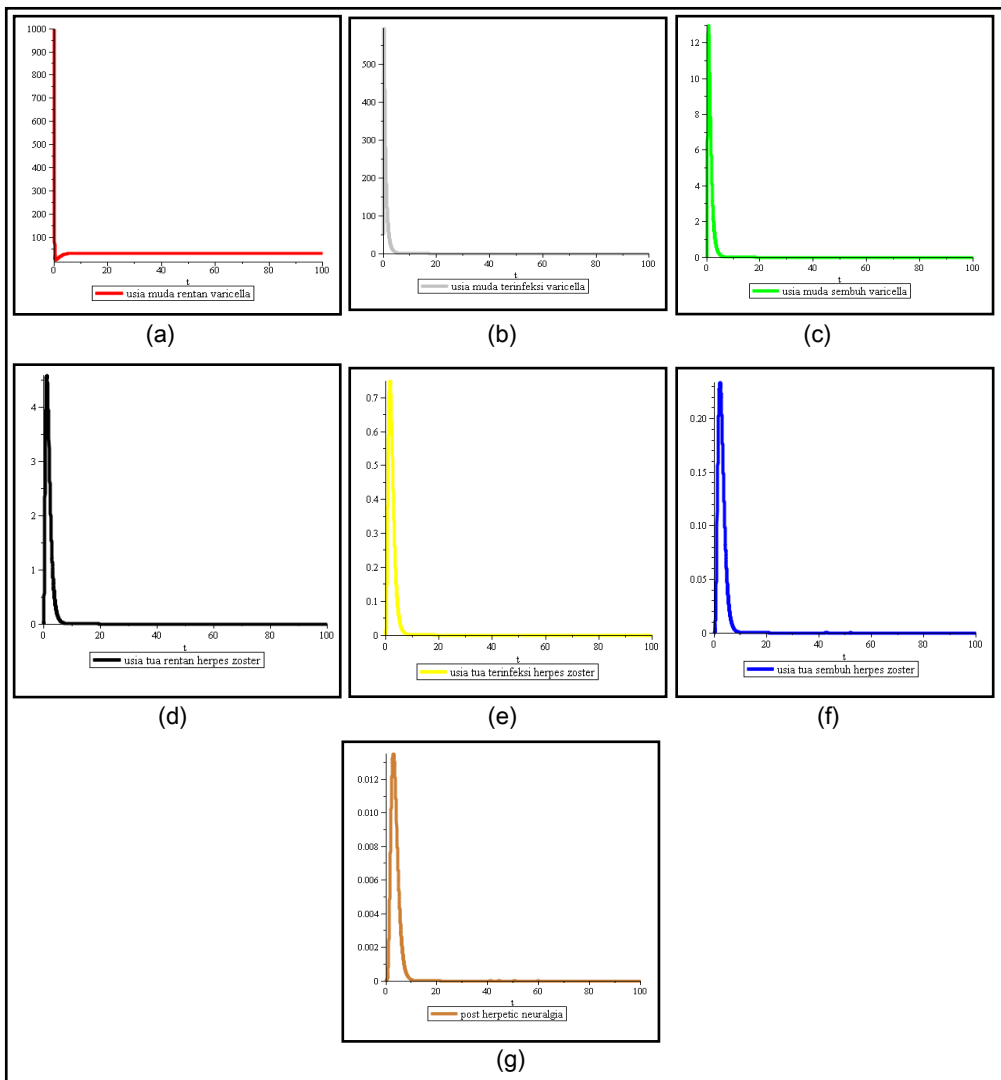
Gambar 2 : Analisa Eksistensi dan Kestabilan Titik Kritis

3.5. Simulasi

3.5.1. Simulasi Kondisi Bebas Penyakit T_1

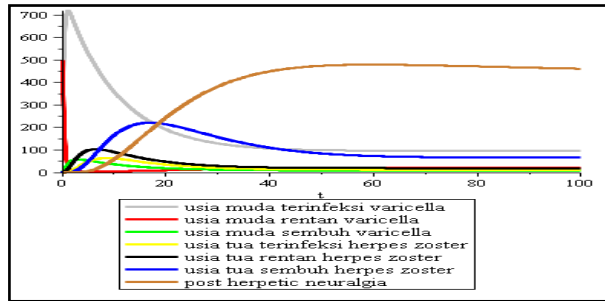
Simulasi ini dilakukan dengan menggunakan nilai awal $S_{ac} = 1000$, $I_{ac} = 50$, $S_{dh} = 0$, $R_{dh} = 0$, $I_{dh} = 0$, dan $M = 0$ dengan interval waktu pengamatan selama 100 tahun. Gambar 3 (a) memperlihatkan bahwa dari 1000 populasi rentan *varicella* berkurang hingga 5 orang dan kembali meningkat di waktu 5 tahun menjadi 33 orang. Populasi manusia terinfeksi *varicella* pada Gambar 3 (b) yang pada mulanya sebanyak 50 orang, meningkat hingga 589 orang

kemudian mengalami penurunan hingga seluruh populasinya berpindah ke kelompok populasi recovered. Populasi manusia yang sembuh dari *varicella* pada Gambar 3 (c) meningkat hingga mencapai 12 orang. Kondisi seperti Gambar 3 (c) bergeser ke kelompok populasi rentan *herpes zoster* pada Gambar 3 (d) yang meningkat hingga 4 orang. Akibatnya, Populasi terinfeksi *herpes zoster* pada Gambar 3 (e) meningkat hingga 0,7 orang, populasi sembuh *herpes zoster* pada Gambar 3 (f) yang meningkat hingga 0,2 orang, populasi *post herpetic neuralgia* pada Gambar 3 (g) yang mengalami peningkatan hingga 0,012 orang. Peningkatan populasi pada kelompok populasi tersebut tidak akan bertahan lama, yang terlihat secara berturut-turut pada Gambar 3 (c), (d), (e), (f), dan (g) yang pada akhirnya setelah 12, 4, 0,7, 0,2 dan 0,012 banyaknya anggota populasi menurun hingga tidak ada lagi anggota populasi pada subpopulasi.



Gambar 3 : Simulasi Kondisi Bebas Penyakit T_1

3.5.2. Simulasi Kondisi Endemik T_2



Gambar 4 : Simulasi Kondisi Endemik T_2

Simulasi ini dilakukan dengan menggunakan nilai awal $S_{ac} = 500$, $I_{ac} = 300$, $S_{dh} = 0$, $R_{dh} = 0$, $I_{dh} = 0$, dan $M = 0$ dengan interval waktu pengamatan selama 100 tahun. Gambar 4 memperlihatkan bahwa pada mulanya, infeksi primer (penyakit *varicella*) pertama kali terjadi pada populasi manusia di usia muda rentan *varicella*. Penyakit ini merupakan salah satu penyakit infeksi virus akut dengan penularan yang cepat, sehingga dari 500 orang populasi manusia di usia muda rentan *varicella* berkurang hingga 4 orang dan meningkat kembali menjadi 20 orang. Pada waktu yang bersamaan, dari 300 populasi manusia di usia muda terinfeksi mengalami peningkatan menjadi 717 orang yang diakibatkan infeksi penularan virus oleh populasi manusia di usia muda terinfeksi *varicella* kepada populasi manusia di usia muda rentan *varicella*. Populasi manusia di usia muda terinfeksi *varicella* yang meningkat tersebut kembali berkurang menjadi 98 orang yang diakibatkan oleh adanya kesembuhan. Kesembuhan pada populasi terinfeksi mengakibatkan populasi manusia di usia muda yang sembuh dari *varicella* meningkat hingga 57 orang dan kembali berkurang menjadi 9 orang yang diakibatkan oleh adanya transisi dari populasi manusia usia muda sembuh dari *varicella* ke populasi manusia usia tua rentan *herpes zoster*. Infeksi rekuren atau infeksi berulang terjadi setelah infeksi primer (penyakit *varicella*) pada populasi manusia di usia tua rentan *herpes zoster*. Populasi manusia di usia tua rentan *herpes zoster* yang meningkat hingga 102 orang pada waktu 10 tahun yang diakibatkan adanya transisi dari populasi manusia di usia muda sembuh *varicella*, kemudian akan kembali berkurang hingga 19 orang populasi akibat adanya infeksi. Berkurangnya populasi tersebut mengakibatkan populasi manusia di usia tua terinfeksi *herpes zoster* bertambah mencapai 63 populasi dan kembali berkurang menjadi 12 populasi karena adanya kesembuhan. Kesembuhan pada populasi terinfeksi mengakibatkan populasi manusia di usia muda yang sembuh dari *herpes zoster* meningkat hingga 220 orang dan kembali berkurang menjadi 66 orang. Berkurangnya populasi sembuh dari *herpes zoster* mengakibatkan populasi *post herpetic neuralgia* bertambah hingga 429 orang.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa :

1. Model matematika infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster* pada populasi manusia sebagai berikut :

$$\frac{dS_{ac}}{dt} = A - \alpha S_{ac} I_{ac} - \mu S_{ac} \quad (17)$$

$$\frac{dI_{ac}}{dt} = \alpha S_{ac} I_{ac} - \beta_1 I_{ac} - \mu I_{ac} \quad (18)$$

$$\frac{dR_{ac}}{dt} = \beta_1 I_{ac} - \delta R_{ac} - \mu R_{ac} \quad (19)$$

$$\frac{dS_{dh}}{dt} = \delta R_{ac} - \omega S_{dh} - \mu S_{dh} \quad (20)$$

$$\frac{dI_{dh}}{dt} = \omega S_{dh} - \beta_2 I_{dh} - \mu I_{dh} \quad (21)$$

$$\frac{dR_{dh}}{dt} = \beta_2 I_{dh} - \gamma R_{dh} - \mu R_{dh} \quad (22)$$

$$\frac{dM}{dt} = \gamma R_{dh} - \mu M \quad (23)$$

2. Kestabilan model matematika infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster* pada populasi manusia diperoleh dua titik kritis yaitu titik kritis T_1 bebas penyakit dan titik kritis T_2 endemik.
3. Analisa kestabilan model matematika infeksi primer (penyakit *varicella*) dan infeksi rekuren (penyakit *herpes zoster*) oleh virus *varicella zoster* pada populasi manusia, diperoleh satu titik kritis T_1 menggambarkan kondisi bebas penyakit yang tidak stabil jika $\alpha < \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$ dan diperoleh dua titik kritis T_1 menggambarkan kondisi bebas penyakit dan T_2 menggambarkan kondisi endemik yang stabil jika $\alpha > \frac{\mu(\beta_1 + \mu)}{A}$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ayuningati L.K, dan Indramaya D.M, *Studi Retrospektif Karakteristik Pasien Herpes Zoster*, Fakultas Kedokteran Universitas Airlangga, 2015, Surabaya.
- [2] Lubis, R. D, *Varicella dan Herpes Zoster*, Fakultas Kedokteran Universitas Sumatera Utara, 2008, Medan.
- [3] National Centre for Immunization Research and Surveillance (NCIRS) Fact Sheet, *Varicella-zoster (chickenpox) vaccines for Australian Children*, 2009, <http://www.ncirs.edu.au>, Diakses tanggal 6 Februari 2018.
- [4] Ofori, M.M, *Mathematical Modeling of The Epidemiology of Varicella*, Kwame Nkrumah University of Science and Technology Kumasi, Ghana, <http://dspace.knust.edu.gh/bitstream/123456789/4105/1>, Diakses tanggal 6 Februari 2018.