Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 17 Nomor 1 Juni 2020 (Halaman 100 - 108)
doi: https://doi.org/10.22487/2540766X.2020.v17.i1.15185

JIMT
Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan

ISSN : 2540 – 766X

REPRESENTASI UNITAR TAK TEREDUKSI GRUP LIE DARI ALJABAR LIE FILIFORM REAL BERDIMENSI 5

Edi Kurniadi

Departemen Matematika FMIPA UNPAD
Jl. Raya Bandung Sumedang Km 21 Jatinangor
Sumedang, Jawa Barat, Indonesia 45361
edi.kurniadi@unpad.ac.id

ABSTRACT

In this paper, we study a harmonic analysis of a Lie group of a real filiform Lie algebra of dimension 5. Particularly, we study its irreducible unitary representation (IUR) and contruct this IUR corresponds to its coadjoint orbits through coadjoint actions of its group to its dual space. Using induced representation of a 1-dimensional representation of its subgroup we obtain its IUR of its Lie group.

Keywords : Coadjoint Orbits,Representation, Irreducible Unitary Representation, Orbit Method.

ABSTRAK

Dalam paper ini, dipelajari harmonik analisis grup Lie dari aljabar Lie filiform yang berdimensi 5 khususnya representasi unitar tak tereduksinya. Representasi yang diperoleh berkorespondensi dengan *coadjoint orbit* berdimensi 2 dari grupnya melalui aksi dari grup tersebut ke dalam ruang dualnya. Dengan menginduksi representasi 1-dimensi dari grup bagiannya diperoleh representasi unitar tak tereduksi dari grup Lie tersebut.

Kata Kunci : Coadjoint Orbit, Representasi, Representasi Unitar Tak Tereduksi, Metode Orbit.

I. PENDAHULUAN

Metode orbit pertama kali diperkenalkan oleh (Kirillov, 1962) untuk masalah representasi grup Lie nilpoten. Selanjutnya, (Kirillov, 1972) memberikan beberapa kajian penting tentang teori representasi termasuk salah satunya adalah metode orbit. Kajian lebih khusus lagi tentang metode orbit dikembangkan oleh (Kirillov, 1999) tentang keuntungan dan kerugian metode orbit dan lebih jauh (Kirillov, 2004) membahas secara detail metode orbit untuk memecahkan berbagai masalah dalam teori representasi grup Lie. Metode orbit ini tentunya dapat menjadi alternatif dalam mengonstruksi suatu representasi grup Lie seperti bagaimana mendeskripsikan ruang dual unitar pada suatu grup Lie.

Metode orbit berkorespondensi dengan *coadjoint orbit* sebagai alat utama untuk mendapatkan suatu representasi grup Lie. *Coadjoint orbit* merupakan himpunan bagian dari suatu ruang dual dari aljabar Lie. Kajian tentang *coadjoint orbit* telah banyak dilakukan. Misalkan (Mykytyuk, 2012) mengkaji secara detail tentang struktur *coadjoint* orbit dari suatu grup Lie, (Bernatska and Holod, 2008) mengkaji tentang *coadjoint orbit* dari grup Lie semi sederhana khususnya pada matriks Lie grup, (Halima, 2016) membahas tentang *coadjoint orbit* dari grup *motion* tertentu dan *coherent state*-nya.

Metode orbit pertama kali hanya digunakan untuk grup Lie nilpoten tetapi kemudian berkembang untuk kasus grup Lie reduktif real (Vogan, 1998), grup *exponential solvable* (Fujiwara and Ludwig, 2015), dan grup *motion* (Halima, 2016).

(Kirillov, 2004) telah membahas beberapa contoh metode orbit untuk representasi grup Lie dari aljabar Lie filiform berdimensi 3 dan 4. Berbeda dengan kajian sebelumnya, dalam paper ini dibahas tentang representasi unitar tak tereduksi grup Lie dari aljabar Lie filiform yang telah diklasifikasikan oleh (Hadjer and Makhlouf, 2012) khususnya yang berdimensi 5. Dengan menggunakan metode orbit, representasi unitar tak tereduksi grup Lie dari aljabar Lie filiform berdimensi 5 dikonstruksi. Representasi yang dibangun berkorespondensi dengan *coadjoint orbit* yang berdimensi 2 dari grup filiformnya.

Berikutnya dibahas beberapa notasi dasar yang diperlukan dalam penelitian ini seperti *coadjoint representations*, *coadjoint orbit,* representasi, representasi unitar tak tereduksi, dan metode orbit. Sedangkan notasi aljabar Lie dan grup Lie tidak dibahas dalam paper ini. Pembaca dapat mempelajari lebih detail tentang dua notasi ini dalam (Humphreys, 1972) dan (Hilgert and Neeb, 2012).

Definisi 1. (Lee, 2003). *Misalkan G suatu grup Lie dengan aljabar Lie-nya adalah $\mathfrak{g}$. Misalkan $g \in G$. Pemetaan yang didefinisikan oleh*

$$C_g : G \ni a \mapsto gag^{-1} \in G \qquad (1)$$

adalah grup Lie homomorfisma dengan turunannya dinotasikan dengan $Ad(g) = (C_g)_*$. Selanjutnya, homomorfisma grup yang didefinisikan oleh

$$Ad(g): \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \qquad (2)$$

disebut representasi adjoint dari G.

Misalkan $\mathfrak{g}^*$ ruang dual dari $\mathfrak{g}$ yaitu $\mathfrak{g}^* = \{f \in \mathfrak{g}^* \quad ; \quad f: \mathfrak{g} \to \mathbb{R}\}$. Untuk kasus matriks Lie grup, $\mathfrak{g}^*$ dapat diidentifikasi oleh ruang $M_n(\mathbb{R})/\mathfrak{g}^\perp$ dengan $M_n(\mathbb{R})$ ruang matriks real $n \times n$ yang mempunyai bentuk linear $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(AB)$ dan $\mathfrak{g}^\perp$ komplemen ortogonal terhadap bentuk linear di $M_n(\mathbb{R})$.

Perhatikan bahwa Pers. (2) adalah aksi dari G ke $\mathfrak{g}$. Selanjutnya kita bisa mendefinisikan notasi representasi *coadjoint* dari G pada $\mathfrak{g}^*$ yang dinotasikan dengan $\mathrm{Ad}^*(g) \coloneqq \mathrm{Ad}(\mathrm{g}^{-1})^*$ dengan nilai fungsional linearnya diberikan oleh

$$\langle \mathrm{Ad}^*(g)f, X\rangle = \langle f, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle \qquad (f \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}) \qquad (3)$$

Dalam hal G adalah grup Lie matriks maka Pers. (3) dapat dihitung menjadi $\mathrm{Ad}^*(g)f = \mathrm{Proy}(gfg^{-1})$ dengan Proy adalah proyeksi dari $M_n(\mathbb{R})$ pada $\mathfrak{g}^*$ sejajar dengan $\mathfrak{g}^\perp$.

Definisi 2.(Kirillov, 2004)**.** *Misalkan $f \in \mathfrak{g}^*$. Coadjoint orbit dari f adalah himpunan yang didefinisikan oleh*

$$\Omega_f \coloneqq \{\mathrm{Ad}^*(g)f \quad ; \quad g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*. \qquad (4)$$

Coadjoint orbit Ω_f mempunyai *closed differential 2-form* yang mengakibatkan adanya struktur simplektik G-invarian. Hal ini mengakibatkan bahwa dimensi dari suatu *coadjoint orbit* selalu genap.

Selanjutnya kita perkenalkan notasi representasi seperti representasi unitar tak tereduksi dan metode orbit

Definisi 3. (Berndt, 2007)**.** *Misalkan G grup dan V ruang vektor real. π dikatakan representasi linear jika $\pi: G \to \mathrm{Aut}(V)$ suatu homomorfisma grup dengan $\mathrm{Aut}(V)$ grup automorfisma dari V ke dirinya sendiri.*

Definisi 4. (Berndt, 2007)**.** *Representasi π dikatakan unitar jika $\|\pi(g)v\| = \|v\|$ untuk setiap $g \in G, v \in V$ dan π dikatakan tak tereduksi jika V tidak mempunyai ruang bagian π-invarian.*

Untuk mendapatkan suatu representasi unitar tak tereduksi dari grup Lie, kita ikuti langkah-langkah dalam (Kirillov, 2004) halaman 80—81 sebagai berikut:

1. Tentukan *coadjoint orbit* $\Omega_f \subset \mathfrak{g}^*$ dari grup Lie tersebut. Pilih titik $f \in \Omega_f \subset \mathfrak{g}^*$.
2. Cari polarisasi Ξ dari $\mathfrak{g}$, yaitu aljabar bagian dari $\mathfrak{g}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut ini:
   a. $\langle f, [\Xi, \Xi]\rangle = 0$,
   b. $\mathrm{codim}_{\mathfrak{g}}\Xi = \frac{1}{2}\mathrm{dimensi}\ \Omega_f$.
3. Konstruksi grup bagian $H = \exp \Xi$ kemudian definisikan representasi ν_f berdimensi 1 dari H melalui rumus

$$\nu_f\ (\exp X) = e^{2\pi i\langle f, X\rangle}. \qquad (X \in \Xi, \text{titik } f \in \Omega_f \subset \mathfrak{g}^*) \qquad (5)$$

4. Tentukan representasi unitar tak tereduksi π dengan cara menginduksi representasi berdimensi satu dari H. Dengan kata lain, $\pi \coloneqq \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\nu_f)$.

Definisi 5.(Corwin and Greenleaf, 1990) *Aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *dikatakan nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif* n *sedemikian sehingga* $\mathfrak{g}^{\,n+1} = 0$ *dengan pangkat pada* $\mathfrak{g}$ *didefinisikan sebagai berikut:*
$\mathfrak{g}^{\,1} = \mathfrak{g}\ ,\ \mathfrak{g}^{\,n+1} = [\mathfrak{g}\ ,\mathfrak{g}^{\,n}] = \mathrm{Span}\{[\mathrm{A},\mathrm{B}]\quad ; \mathrm{A} \in \mathfrak{g}\ , \mathrm{B} \in \mathfrak{g}^{\,n}\}.$

II. METODE PENELITIAN

Penelitian dalam paper ini berbasis pada studi literatur terutama pada hasil kerja yang telah diperoleh (Hadjer and Makhlouf, 2012) tentang aljabar Lie filiform khususnya yang berdimensi 5 dengan *bracket* tak nolnya adalah $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4$ dan $[X_1, X_4] = X_5$. Dengan membentuk grup Lie dari aljabar Lie filiform berdimensi 5 tersebut, selanjutnya dikonstruksi representasi unitar tak tereduksinya dengan menggunakan metode orbit yang diperkenalkan oleh (Kirillov, 2004) berkorespondensi dengan *coadjoint orbit* yang berdimensi 2.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Kajian tentang aljabar Lie filiform salah satunya telah dilakukan oleh (Hadjer and Makhlouf, 2012). Dalam paper ini, dikaji harmonik analisis khususnya representasi unitar tak tereduksi dari grup Lie G yang aljabar Lie-nya adalah aljabar Lie filiform berdimensi 5. Dalam paper (Hadjer and Makhlouf, 2012), ada dua kelas isomorfisma aljabar Lie filiform berdimensi 5. Dalam paper ini, dibahas harmonik analisis salah satu kelas isomorfisma aljabar Lie filiform berdimensi 5 dengan basis $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ dengan *bracket* tak nolnya diberikan sebagai berikut:

$$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4, \text{ dan } [X_1, X_4] = X_5 \qquad (6)$$

Sifat 6. *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *aljabar Lie filiform berdimensi 5 dengan basis* $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ *dengan bracketnya diberikan dalam Pers.* (6). Maka $\mathfrak{g}$ bersifat nilpoten.

Bukti :

Dengan menghitung langsung, diperoleh bahwa

$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}\ ,\mathfrak{g}\ ] = \mathrm{Span}\{\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4, \mathrm{X}_5\},$

$\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}\ ,\mathfrak{g}^2] = \ \mathrm{Span}\{\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_5\},$

$\mathfrak{g}^4 = [\mathfrak{g}\ ,\mathfrak{g}^3] = \ \mathrm{Span}\{\mathrm{X}_5\},$

$\mathfrak{g}^5 = [\mathfrak{g}\ ,\mathfrak{g}^4] = \ 0.$

Oleh karena itu, terdapat $n = 4$ sedemikian sehingga $\mathfrak{g}^5 = 0$. Dengan kata lain, $\mathfrak{g}$ adalah aljabar Lie nilpoten. Untuk mempermudah, elemen dari aljabar Lie filiform dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$X = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k X_k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Dengan kata lain aljabar Lie filiform berdimensi 5 dibangun oleh matriks-matriks berbentuk

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, misalkan G adalah grup Lie dari aljabar Lie filiform ini dengan elemen-elemennya dinyatakan dalam koordinat kanonik tipe dua dan dituliskan sebagai berikut:

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5) = \exp X = \exp \alpha_5 X_5 . \exp \alpha_4 X_4 \dots \exp \alpha_1 X_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 & \frac{1}{6}\alpha_1^3 & \alpha_5 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Kita notasikan $g \coloneqq g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5)$.

Ruang dual $\mathfrak{g}^*$ dapat diidentifikasi dengan matriks segitiga bawah yang berbentuk

$$\mathfrak{g}^* \ni f = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ \frac{1}{3}X_1^* & * & * & * & * \\ * & \frac{1}{3}X_1^* & * & * & * \\ * & * & \frac{1}{3}X_1^* & * & * \\ X_5^* & X_4^* & X_3^* & X_2^* & * \end{pmatrix} \quad (9)$$

Dengan nilai fungsional linearnya diberikan oleh

$$\langle f, X \rangle = \text{trace (FX)} = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \dots + \alpha_5 X_5^*. \quad (10)$$

Sekarang kita hitung *coadjoint actions* dari G pada $\mathfrak{g}^*$. Misalkan

$$g=\begin{pmatrix}1 & \alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 & \frac{1}{6}\alpha_1^3 & \alpha_5\\ 0 & 1 & \alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 & \alpha_4\\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$$ dengan invers g diberikan oleh

$$g^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 & -\frac{1}{6}\alpha_1^3 & -\frac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_3+\frac{1}{6}\alpha_1^3\alpha_2+\alpha_1\alpha_4-\alpha_5\\ 0 & 1 & -\alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_3-\frac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_2-\alpha_4\\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2-\alpha_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

dan $f=\begin{pmatrix}* & * & * & * & *\\ \frac{1}{3}X_1^* & * & * & * & *\\ * & \frac{1}{3}X_1^* & * & * & *\\ * & * & \frac{1}{3}X_1^* & * & *\\ X_5^* & X_4^* & X_3^* & X_2^* & *\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}^*$. *Coadjoint actions* dari G pada $\mathfrak{g}^*$ adalah

$$\mathrm{Ad}^*(g)f=\mathrm{Proy}(gfg^{-1})=f\big(X_1^*+\alpha_2X_2^*+(\alpha_3-\alpha_1\alpha_2)X_4^*+\left(\alpha_4-\alpha_1\alpha_3+\tfrac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_2\right)X_5^*,\quad X_2^*-\alpha_1X_3^*+\tfrac{1}{2}\alpha_1^2X_4^*-\tfrac{1}{6}\alpha_1^3X_5^*,\ X_3^*-\alpha_1X_4^*+\tfrac{1}{2}\alpha_1^2X_5^*,\ X_4^*-\alpha_1X_5^*,\ X_5^*\ \big),\tag{11}$$

Dengan proy adalah proyeksi dari ruang $M_5(\mathbb{R})$ yaitu ruang yang memuat matriks real berukuran 5×5 ke ruang dual $\mathfrak{g}^*$ dan matriks gfg^{-1} diberikan oleh

$$gfg^{-1}=\begin{pmatrix}* & * & * & * & *\\ \frac{1}{3}X_1^*+\alpha_4X_5^* & * & * & * & *\\ * & \frac{1}{3}X_1^*+\alpha_3X_4^*-\alpha_1\alpha_3X_5^* & * & * & *\\ * & * & \frac{1}{3}X_1^*+\alpha_2X_2^*-\alpha_1\alpha_2X_4^*+\frac{1}{2}\alpha_1^2\alpha_2X_5^* & * & *\\ X_5^* & X_4^*-\alpha_1X_5^* & X_3^*-\alpha_1X_4^*+\frac{1}{2}\alpha_1^2X_5^* & X_2^*-\alpha_1X_3^*+\frac{1}{2}\alpha_1^2X_4^*-\frac{1}{6}\alpha_1^3X_5^* & *\end{pmatrix}\tag{12}$$

Lema 7. *Misalkan G grup Lie dari aljabar Lie filiform berdimensi 5 $\mathfrak{g}$ dan $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$ adalah aljabar dari fungsi polinomial G −invarian pada $\mathfrak{g}^*$. Maka polinom G-invariannya diberikan oleh*

$$\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G\simeq C[P,Q,R]$$

dengan $P = X_5^*$, $Q = 2X_3^*X_5^* - X_4^{*2}$, *dan* $R = 3X_5^{*^2}X_2^* - 3X_5^*X_4^*X_2^* + X_4^{*^2}$ (13)

Bukti :

Perhatikan formula dalam Pers. (11), salah satu polinomial invariannya adalah $P(f) = p = X_5^*$ karena koordinat $P(f)$ pada ruang dual $\mathfrak{g}^*$ tidak berubah terhadap aksi *coadjoint*-nya. Untuk mencari polinomial invarian lainnya, anggap $p \neq 0$ sehingga kita dapat menghilangkan parameter bergantungnya. Dari Pers. (2), misalkan $t = X_4^* - \alpha_1 X_5^*$ sehingga diperoleh rasional invariannya $X_3^* - \frac{X_4^{*^2}}{2X_5^*}$ dan $X_2^* - \frac{X_4^*X_3^*}{X_5^*} + \frac{X_4^{*^2}}{3X_5^{*^2}}$. Polinomial invariannya adalah $Q(f) = q = 2X_3^*X_5^* - X_4^{*^2}$ dan $R(f) = r = 3X_2^*X_5^{*^2} - 3X_2^*X_4^*X_5^* + X_4^{*^2}$.

Teorema 8. *Misalkan* G *grup Lie dari aljabar Lie filiform berdimensi* 5 *dengan bracket tak nolnya* $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4$, *dan* $[X_1, X_4] = X_5$. *Representasi unitar* G *pada ruang Hilbert* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *diberikan oleh persamaan*

$$\begin{aligned}\pi_{\Omega_f} g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)\psi(x) &= \mathrm{Ind}_\Theta^G\, \nu_{\Omega_f} g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)\psi(x) \\ &= e^{2\pi i\left(\frac{\alpha_2 r}{3p^2} + \frac{(\alpha_3 + \alpha_2 x)q}{2p} + \left(\alpha_5 + \alpha_4 x + \frac{\alpha_3}{2}x^2 + \frac{\alpha_3}{6}x^3\right)p\right)}\psi(x + \alpha_1). \quad (14)\end{aligned}$$

dengan $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathrm{G}$, dan $f \in \Omega_f \subset \mathfrak{g}^*$.

Bukti.

Untuk mengonstruksi representasi unitar tak tereduksi dari grup Lie tersebut. Kita ikuti langkah-langkah sebagai berikut:

1. Dari Lema 7, misalkan $p \neq 0$ maka kita memperoleh *coadjoint orbit* Ω_f dengan f adalah titik $(0, \frac{r}{3p^2}, \frac{q}{2p}, 0, p)$ dan dimensi Ω_f adalah 2. Karena dimensi Ω_f adalah 2, maka kodimensi polarisasi Ξ di $\mathfrak{g}$ adalah $\frac{1}{2}\mathrm{dimensi}\,\Omega_f = \frac{1}{2}.2 = 1$. Dengan kata lain, dimensi Ξ adalah 4. Pilih aljabar bagian $\Xi = \mathrm{Span}\{X_2, X_3, X_4, X_5\} \subset$. Perhatikan bahwa $\langle f, [\Xi, \Xi]\rangle = 0$. Oleh karena itu, Ξ adalah polarisasi dari $\mathfrak{g}$.

2. Misalkan grup Lie dari Ξ adalah $\Theta = \exp \Xi$. Representasi 1-dimensi dari Θ diberikan oleh
$$\nu_{\Omega_f}(\exp X) = e^{2\pi i\langle f, X\rangle} = e^{2\pi i\left(\frac{\alpha_2 r}{3p^2} + \frac{\alpha_3 q}{2p} + \alpha_5 p\right)}. \qquad (X \in \Xi, \text{titik } f \in \Omega_f \subset \mathfrak{g}^*) \quad (5)$$

3. Karena ruang kuosien $H = G/\Theta$ dapat diidentifikasi oleh $\mathbb{R}$ maka kita dapat mendefinisikan pemetaan
$$s : \mathbb{R} \ni x \mapsto \exp xX_1 \in G$$

   sehingga dengan menyelesaikan persamaan matriks dalam β_i dengan $i = 2,3,4,5$ dan y dari

$$\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{6}x^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & \frac{1}{2}x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 & \frac{1}{6}\alpha_1^3 & \alpha_5 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \frac{1}{2}\alpha_1^2 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \beta_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & \frac{1}{2}y^2 & \frac{1}{6}y^3 & 0 \\ 0 & 1 & y & \frac{1}{2}y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

kita peroleh

$$y = x + \alpha_1$$
$$\beta_2 = \alpha_2$$
$$\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_2 x$$
$$\beta_5 = \alpha_5 + \alpha_4 x + \frac{\alpha_3}{2}x^2 + \frac{\alpha_3}{6}x^3. \qquad (16)$$

4. Dengan induksi pada Representasi 1-dimensi dari grup bagian Θ pada Pers. 5 kita peroleh representasi unitar tak tereduksi dari grup Lie G dari aljabar Lie filiform berdimensi 5 sebagai berikut:

$$\pi_{\Omega_f} g\, \psi(x) = \mathrm{Ind}_{\Theta}^{G}\, \nu_{\Omega_f} g\, \psi(x) = e^{2\pi i\left(\frac{\alpha_2 r}{3p^2} + \frac{(\alpha_3+\alpha_2 x)q}{2p} + \left(\alpha_5+\alpha_4 x+\frac{\alpha_3}{2}x^2+\frac{\alpha_3}{6}x^3\right)p\right)}\psi(x+\alpha_1).$$

dengan $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), g \in \mathrm{G}$, dan $f \in \Omega_f \subset \mathfrak{g}^*$. Dalam hal ini, G direalisasikan dalam ruang Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

IV. KESIMPULAN

Dalam bagian penutup ini, penulis menyimpulkan hasil penelitiannya sebagai berikut:

1. Misalkan G grup Lie dari aljabar Lie filiform $\mathfrak{g}$ berdimensi 5 dengan *bracket* tak nolnya $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4$, dan $[X_1, X_4] = X_5$. Polimom G-invarian terhadap aksi *coadjoint* pada $\mathfrak{g}^* = \mathrm{Span}\{X_i\}$ $(i = 1,2,3,4,5)$ berbentuk

$$P = X_5^*, \qquad Q = 2X_3^* X_5^* - X_4^{*2}, \text{ dan } R = 3X_5^{*^2} X_2^* - 3X_5^* X_4^* X_2^* + X_4^{*^2}.$$

2. Representasi unitar tak tereduksi G pada ruang Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ diberikan oleh formula

$$\pi_{\Omega_f} g\, \psi(x) = \mathrm{Ind}_{\Theta}^{G}\, \nu_{\Omega_f} g\, \psi(x) = e^{2\pi i\left(\frac{\alpha_2 r}{3p^2} + \frac{(\alpha_3+\alpha_2 x)q}{2p} + \left(\alpha_5+\alpha_4 x+\frac{\alpha_3}{2}x^2+\frac{\alpha_3}{6}x^3\right)p\right)}\psi(x+\alpha_1).$$

   dengan $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), g \in \mathrm{G}$, dan $f \in \Omega_f \subset \mathfrak{g}^*$.

3. Hasil penelitian ini dapat digeneralisasi untuk kasus aljabar Lie filiform berdimensi ≥ 6.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bernatska, J., And P. Holod. *‘Geometry And Topology Of Coadjoint Orbits Of Semi Simple Lie Groups’* (2008):146–166.

[2] Berndt, *R. Representation Of Linear Groups. An Introduction Based On Examples From Physics And Number Theory*. Wiesbaden: Vieweg. 2007.

[3] Corwin, L. J., And F. Greenleaf. *Representations Of Nilpotent Lie Groups And Their Applications. Part I. Basic Theory And Examples*,. Cambridge: Cambridge University Press. 1990.

[4] Fujiwara, H., And J. Ludwig. *Harmonic Analysis On Exponential Solvable Lie Groups*. 2015.

[5] Hadjer, A., And A. Makhlouf. *‘Index Of Graded Filiform And Quasi Filiform Lie Algebras’* ,May 2014(2012).

[6] Halima, M. Ben. *‘Coadjoint Orbits Of Certain Motion Groups And Their Coherent States’* 9251,August(2016).

[7] Hilgert, J., And K.-H. Neeb. *Structure And Geometry Of Lie Groups*. New York: Springer Monographs In Mathematics, Springer. 2012.

[8] Humphreys, J. . *Introduction To Lie Algebra And Its Representation.Pdf (Third Prin)*. New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag. 1972.

[9] Kirillov, A. . *‘Unitary Representations Of Nilpotent Lie Groups’*. Uspekhi Mat.Nauk 17(1962):57--110.

[10] Kirillov, A. *Elements Of The Theory Of Representations*. 1972.

[11] Kirillov, A. . ‘*Merits And Demerits Of The Orbit Method*. Bull.Amer.Math.Soc 36(1999):433--488.

[12] Kirillov, A. A. *‘Lectures On The Orbit Method, Graduate Studies In Mathematics’*. American Mathematical Society,Providence 64(2004).

[13] Lee, J. *Introduction To Smooth Manifolds, Graduate Text In Mathematics*,. New York: Springer-Verlag. 2003.

[14] Mykytyuk, I. V. *‘Structure Of The Coadjoint Orbits Of Lie Algebras’*. J. Lie Theory 22(2012):251--268.

[15] Vogan, D. A. *‘The Method Of Coadjoint Orbits For Real Reductive Groups’*. IAS/Park City Mathematics Series 6(1998).