Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 18 Nomor 1 Juni 2021 (Halaman 62 - 74)
doi: https://doi.org/10.22487/2540766X.2021.v18.i1.15434

Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
ISSN : 2540 – 766X

MODIFIKASI METODE HOUSEHOLDER TIGA PARAMETER YANG BEBAS TURUNAN KEDUA DENGAN ORDE KONVERGENSI OPTIMAL

Wartono[1], M. Zulianti[2], dan Rahmawati[3]

[1, 2, 3]Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jalan Subrantas km 15,5, Simpang Baru, Pekanbaru 28293
[1]wartono@uin-suska.ac.id, [2]merizulianti@gmail.com, [3]rahmawati@uin-suska.c.id

ABSTRACT

The Householder's method is one of the iterative methods with a third-order convergence that used to solve a nonlinear equation. In this paper, the authors modified the iterative method using the expansion of second order Taylor's series and approximated its second derivative using equality of two the third-order iterative methods. Based on the results of the study, it was found that the new iterative method has a fourth-order of convergence and requires three evalutions of function with an efficiency index of 1,5874. Numerical simulation is given by using several functions to compare the performance between the new method with other iterative methods. The results of numerical simulation show that the performance of the new method is better than other iterative methods.

Keywords : Efficiency Index, Householder's Method, Newton's Method, Nonlinear Equation, Order of Convergence

ABSTRAK

Metode Householder merupakan salah satu metode iterasi dengan orde konvergensi tiga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Pada artikel ini, penulis memodifikasi metode Householder dengan menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua, dan mengaproksimasi turunan keduanya menggunakan penyetaraan dua metode iterasi berorde konvergensi tiga. Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa metode iterasi baru memiliki orde konvergensi empat dan melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar 1,5874. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa fungsi untuk membandingkan performa antara metode iterasi baru dengan metode iterasi lainnya. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa metode iterasi baru mempunyai performa yang lebih baik dibandingkan metode iterasi lainnya.

Kata kunci : Indeks Effisiensi, Metode Householder, Metode Newton, Persamaan Nonlinier, Orde Konvergensi

I. PENDAHULUAN

Persamaan nonlinear merupakan representasi matematis dari berbagai persoalan dibidang sains, teknologi dan rekayasa (Burden dan Faires, 2011; Epperson, 2013). Permasalahan yang sering ditemukan di dalam bidang matematika salah satunya adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinier dalam bentuk

$$f(x)=0. \tag{1}$$

Metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier adalah metode numerik yang menghasilkan solusi hampiran yang bersifat iterasi. Metode iterasi yang paling sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan persamaan nonlinier adalah metode Newton dengan bentuk iterasinya

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

Metode Newton pada Persamaan (2) merupakan metode iterasi berorde konvergensi dua dengan indeks efisiensi sebesar $2^{1/2} \approx 1{,}4142$.

Metode Newton dikontruksi dari ekspansi deret Taylor orde satu, sedangkan penggunaan ekspansi deret Taylor orde dua menghasilkan tiga metode iterasi klasik, yaitu metode Chebyshev (Amat dkk, 2008), metode Halley (Gander, 1985; Argyros, 1993; Melman, 1997; Amat dkk, 2003), dan metode Euler (Melman, 1997). Semua metode iterasi tersebut memiliki orde konvergensi tiga dan melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya.

Berdasarkan bentuk metode Chebyshev dan Halley, Guietierrez (Gutierrez, 1997) memperumum bentuk kedua metode iterasi tersebut dengan menambahkan satu parameter real yang diberikan oleh

$$x_{n+1}=x_n-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{L_f(x_n)}{1-\beta L_f(x_n)}\right)\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{3}$$

dengan

$$L_f(x_n)=\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{4}$$

Persamaan (3) lebih dikenal dengan nama metode Chebyshev-Halley dan untuk beberapa nilai real β memberikan bentuk-bentuk khusus, yaitu metode Chebyshev (β = 0), metode Halley (β = ½) dan metode Super Halley (β = 1).

Selain menggunakan pendekatan ekspansi deret Taylor, Householder (1970) memperkenalkan teknik baru mengkontruksi suatu metode iterasi dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n + (p+1)\left(\frac{\left(\frac{1}{f} \right)^{(p)}}{\left(\frac{1}{f} \right)^{(p+1)}} \right)_{x_n}, \tag{5}$$

dengan *p* adalah bilangan bulat positif dan Persamaan (5) secara umum memiliki orde konvergensi sebesar (p + 2).

Oleh karena Persamaan (5) merupakan bentuk umum dari suatu metode iterasi, maka dengan mengambil sembarang nilai *p* bilangan bulat positif, maka diperoleh beberapa metode iterasi klasik. Misalkanya, untuk p = 0, maka Persamaan (5) menjadi metode Newton, dan untuk p = 1, maka Persamaan (5) menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n) f''(x_n)}{2 f'^2(x_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} L_f(x_n) \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{6}$$

Persamaan (6) merupakan metode iterasi Householder dengan orde konvergensi tiga. Namun, sebagian peneliti menyebutnya sebagai metode iterasi Chebyshev.

Untuk menghindari penggunaan turunan kedua, beberapa peneliti telah memodifikasi, baik keluarga metode Chebyshev-Halley yang diberikan pada Persamaan (3) maupun metode Householder yang diberikan pada Persamaan (6) dengan mengganti bentuk L_f (x_n) dengan menggunakan berbagai pendekatan, seperti fungsi kubik (Chun, 2007a), fungsi kuadratik (Chun, 2007b), fungsi hiperbolik (Xiaojian, 2008), selisih terbagi (Chun dan Ham, 2008), fungsi parabolik (Yu dan Xu, 2012), dan kesamaan dua metode iterasi (Wartono dkk, 2016; Alamsyah dan Wartono, 2017).

Pada artikel ini dikontruksi sebuah varian metode iterasi Householder dengan menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua. Untuk menghindari penggunaan turunan kedua yang muncul pada metode iterasi tersebut, penulis mengaproksimasinya menggunakan kesamaan dua metode iterasi, sebagaimana yang dilakukan oleh Wartono dkk. (2016). Selanjutnya, untuk memberikan peluang meningkatnya orde konvergensi dari metode yang diusulkan, tiga parameter real ditambahkan pada metode iterasi tersebut.

II. METODE PENELITIAN

Pada bagian ini, penulis menggunakan beberapa definisi yang digunakan pada proses mengkontruksi metode iterasi, menentukan orde konvergensi baik menggunakan ekspansi deret Taylor maupun komputasi (COC) dan simulasi numerik. Adapun teorema dan definisi yang digunakan diberikan sebagai berikut.

Definisi 1. Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi yang mempunyai akar persamaan α dan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan bilangan real untuk $n \geq 0$ yang konvergen ke α. Jika terdapat sebuah konstanta $c \neq 0$ dan $p \geq 1$ sedemkian sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c \tag{7}$$

maka p adalah orde konvergensi dari barisan $\{x_n\}$, dan c adalah konstanta galat asimptotik (*asymptotic error constant*). Untuk p = 1, 2, dan 3, maka barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen secara linear, kuadratik dan kubik.

Definisi 2. Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah galat pada iterasi ke-n, maka galat pada iterasi ke-$(n + 1)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}) \,. \tag{8}$$

Persamaan (8) adalah persamaan galat dari suatu metode iterasi yang berode konvergensi p.

Definisi 3. Misalkan d adalah jumlah evaluasi fungsi atau derivatifnya dari suatu metode iterasi yang berorde konvergensi p, maka efisiensi metode iterasi diukur dengan indeks efisiensi yang diberikan oleh

$$I = p^{1/d} \,. \tag{9}$$

Definisi 4. Misalkan α adalah akar persamaan dari fungsi $f(x)$ dan x_{n-1}, x_n, dan x_n berturut-turut adalah akar-akar pendekatan pada iterasi ke $n-1$, n, dan $n + 1$, maka orde konvergensi komputasi dihitung menggunakan rumusan sebagai berikut.

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)\right|} \,. \tag{10}$$

Untuk mengkontruksi metode iterasi, pertimbangkan ekspansi deret Taylor orde dua dengan persekitara x_n sebagai berikut.

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 \,. \tag{11}$$

Misalkan x_{n+1} adalah akar pendekatan pada iterasi ke-$(n + 1)$ yang cukup dekat dengan akar eksak α maka $f(x_{n+1}) \approx 0$, sehingga untuk $x = x_{n+1}$ Persamaan (11) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \dfrac{f''x_n}{2}(x_{n+1}^* - x_n)} \,, \tag{12}$$

dengan x_{n+1}^{*} adalah metode Householder yang diberikan pada Persamaan (6).

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan kembali bentuk metode iterasi Householder ke Persamaan (12), maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)f'(x_n)^3}{3f'(x_n)^4 + \left(f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)\right)^2}, \tag{13}$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{4L_f(x_n)}{4L_f(x_n) - 2L_f(x_n)^2 - L_f(x_n)^3}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{14}$$

dengan $L_f(x_n)$ diberikan pada Persamaan (4).

Selanjutnya, untuk memberikan peluang meningkatknya orde konvergensi, maka Persamaan (14) ditambahkan tiga parameter real θ, β, dan γ dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{4Lf(x_n)}{4\theta Lf(x_n) - 2\beta Lf(x_n)^2 - \gamma Lf(x_n)^3}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{15}$$

Selain itu, untuk menghindari adanya penggunaan turunan kedua pada metode iterasi, beberapa teknik mereduksi turunan kedua diusulkan, salah satunya dilakukan dengan menggunakan penyetaraan dua metode iterasi (Alamsyah dan Wartono, 2017; Wartono dkk, 2016; Wartono dkk, 2018).

Untuk menyusun bentuk reduksi turunan kedua, penulis mempertimbangkan kembali dua metode iterasi berorde konvergensi tiga, yaitu metode varian Newton (Chun, 2008) dan metode Halley (Amat, 2003) yang masing-masing ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{f(x_n) + 2f(y_n)}{f(x_n) + f(y_n)}\right), \tag{16}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}. \tag{17}$$

Berdasarkan kedua persamaan tersebut, akan ditentukan bentuk $L_f(x_n)$ dengan mensubstitusikan Persamaan (16) ke Persamaan (17), dan diperoleh:

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} = \frac{2f(y_n)}{f(x_n) + 2f(y_n)}, \tag{18}$$

atau

$$L_f(x_n) = \frac{2f(y_n)}{f(x_n) + 2f(y_n)}. \tag{19}$$

dengan y_n adalah metode Newton yang diberikan pada Persamaan (2).

Selanjutnya subsitusikan Persamaan (19) ke Persamaan (15), dan diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{(f(x_n)+2f(y_n))^2}{\beta f(y_n)\big(f(x_n)+2f(y_n)\big)-\theta\big(f(x_n)+2f(y_n)\big)^2+\gamma f(y_n)^2} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{20}$$

Persamaan (20) adalah metode iterasi dua langkah dengan tiga parameter yang bebas turunan yang dihasilkan dari modifikasi metode Householder menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Orde Konvergensi

Untuk melihat akselerasi metode iterasi pada Persamaan (20) pada proses menghampiri akar-akar persamaan nonlinear, maka salah satu ukuran yang digunakan adalah orde konvergensi. Oleh karena itu, pada sub-bagian ini akan dibuktikan orde konvergensi Persamaan (20) menggunakan ekspansi deret Taylor.

Teorema 1. Misalkan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f : D \subset R \to R$ untuk suatu interval terbuka D. Selanjutnya asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari $f(\alpha)=0$. Jika x_0 adalah tebakan awal yang cukup dekat ke α, maka metode iterasi pada Persamaan (20) memilki orde konvergensi empat untuk $\theta = -1$, $\beta = -1$ dan $\gamma = -3$ dengan persamaan galat

$$e_{n+1} = \left(10c_2^3 - c_2c_3\right)e_n^4 + O(e_n^5), \tag{21}$$

dengan

$$e_n = x_n - \alpha \text{ dan } c_k = \frac{1}{k!}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, \ k = 2, 3, \ldots .$$

Bukti : Misalkan $\alpha \in D$ dengan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x)=0$. Ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ disekitar α diberikan oleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n-\alpha)^3 + \cdots \tag{22}$$

Oleh karena galat pada iterasi ke – n adalah $e_n = x_n - \alpha$ dan $f(\alpha)=0$, maka Persamaan (22) dapat ditulis kembali

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{23}$$

Nilai $f'(x_n)$ dihitung dengan menggunakan cara yang sama dalam bentuk

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{24}$$

Berdasarkan Persamaan (23) dan (24) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + \cdots + \mathrm{O}(e_n^5). \tag{25}$$

Substitusikan Persamaan (28) ke Persamaan (2) dan dengan menggunakan $x_n = e_n + \alpha$ diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + \cdots + \mathrm{O}(e_n^5)). \tag{26}$$

Nilai $f(y_n)$ ditentukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar α yang diberikan oleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left(c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (3c_4 + 5c_2^3 - 7c_2c_3)e_n^4 + \mathrm{O}(e_n^5)\right). \tag{27}$$

Dengan menggunakan Persamaan (23) dan (27) diperoleh berturut-turut

$$f(x_n) + 2f(y_n) = f'(\alpha)\left(e_n + 3c_2e_n^2 + (5c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + \ldots + \mathrm{O}(e_n^5)\right), \tag{28}$$

$$f(y_n)^2 = f'(\alpha)^2\left(c_2^2e_n^4 + (4c_2c_3 - 4c_2^3)e_n^5 + \ldots + \mathrm{O}(e_n^8)\right), \tag{29}$$

dan

$$\left(f(x_n) + 2f(y_n)\right)^2 = f'(\alpha)^2\left(e_n^2 + 6c_2e_n^3 + (c_2^2 + 10c_3)e_n^4 + \mathrm{O}(e_n^5)\right). \tag{30}$$

Terakhir, penggunaan Persamaan (25), (28), (29) dan (30) memberikan

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(f(x_n)+2f(y_n))^2}{\beta f(y_n)\left(f(x_n)+2f(y_n)\right)-\theta\left(f(x_n)+2f(y_n)\right)^2+\gamma f(y_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= -\frac{e_n}{\theta} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta}{\theta^2}\right)c_2e_n^2 + \left(\frac{1}{\theta^3}\left(\beta^2 + \theta\left(6\beta - \gamma\right) - 2\theta^2\right)c_2^2 + \frac{1}{\theta^2}\left(-2\beta + 2\theta\right)c_3\right)e_n^3 \\
&+ \left(\frac{1}{\theta^4}\left(\beta^3 + \theta\left(11\beta^2 - 2\beta\gamma\right) + \theta^2\left(11\gamma - 31\beta\right) + 4\theta^3\right)c_2^3\right. \\
&\left. + \frac{1}{\theta^3}\left(-4\beta^2 + \theta\left(22\beta - 4\gamma\right) - 7\theta^2\right)c_2c_3 + \frac{1}{\theta^2}\left(-3\beta + 3\theta\right)c_4\right)e_n^4 + O(e_n^5).
\end{aligned} \tag{31}$$

Subsitusikan Persamaan (31) ke Persamaan (20), dan dengan menggunakan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, maka Persamaan (20) menjadi

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= \frac{1}{\theta}\left(\theta + 1\right)e_n + \frac{1}{\theta^2}\left(\beta - \theta\right)c_2e_n^2 + \left(\frac{1}{\theta^3}\left(\beta^2 + 2\theta^2 + \theta\left(\gamma - 6\beta\right)\right)c_2^2 + \frac{1}{\theta^2}\left(2\beta - 2\theta\right)c_3\right)e_n^3 \\
&+ \left(\frac{1}{\theta^4}\left(\beta^2 + \theta\left(2\beta\gamma - 11\beta^2\right) + \theta^2\left(31\beta - 11\gamma\right) - 4\theta^2\right)c_2^3 + \frac{1}{\theta^3}\left(4\beta + 4\theta\beta^2\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+\theta^2\left(4\gamma-22\beta\right)+7\theta^3\Big)c_2c_3+\frac{1}{\theta^2}\left(3\beta-3\theta\right)c_4\Bigg)e_n^4+O(e_n^5)\,. \qquad (32)$$

Persamaan (32) memberikan informasi bahwa orde konvergensi metode iterasi pada Persamaan (20) dapat meningkat jika koefesien e_n dan e_n^2 sama dengan nol. Oleh karena itu dengan mengambil dengan mengambil $\theta = -1$ dan $\beta = -1$ diperoleh

$$e_{n+1}=\left(3+\gamma\right)c_2^2e_n^3+\Big(\left(-17-9\gamma\right)c_2^3+\left(11+4\gamma\right)c_2c_3\Big)e_n^4+O(e_n^5)\,. \qquad (33)$$

Berdasarkan (33) jelas sekali terlihat bahwa orde konvergensi metode iterasi pada Persamaan (20) dapat dinaikkan kembali jika $\gamma = -3$, sehingga dengan mensubsitusikan $\gamma = -3$ ke Persamaan (33) diperoleh

$$e_{n+1}=(10c_2^3-c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5)\,. \qquad (34)$$

Persamaan (34) merupakan persamaan galat metode modifikasi Householder bebas turunan kedua dengan tiga parameter. Berdasarkan persamaan galat yang diperoleh, menunjukkan bahwa metode Householder memiliki orde konvergensi empat dan melibatkan tiga evaluasi fungsi sehingga dengan menggunakan Persamaan (9) indeks efisiensi adalah sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}5874$.

Selanjutnya, indeks efisiensi metode iterasi (20), dibandingkan dengan metode Newton (Traub, 1964), metode Halley (Gander, 1985; Argyros, 1993), Householder (Householder, 1970), Newton ganda (Traub, 1964) yang diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1 : Perbandingan Indeks Effisiensi dari beberapa metode iterasi

No	Metode Iterasi	Orde Konvergensi (p)	Evaluasi fungsi (d)	Indeks effisiensi (I)
1.	Newton	2	2	$2^{1/2} \approx 1{,}4142$
2.	Halley	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4422$
3.	Householder	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4422$
4.	Newton Ganda	4	4	$4^{1/4} \approx 1{,}4142$
6.	Modifikasi Houséholder	4	3	$4^{1/3} \approx 1{,}5874$

Berdasarkan Tabel 1, metode iterasi yang diberikan pada Persamaan (20) memiliki indeks efisiensi paling besar dari metode iterasinya lainnya. Menurut Kung dan Traub (1974), hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi tersebut lebih efektif pada proses menghampiri akar-akar persamaan nonlinear.

3.2. Simulasi Numerik

Pada subbab ini akan dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan jumlah iterasi dan *COC (Computational Order of Convergence)* dari modifikasi metode Householder tiga parameter pada Persamaan (20) dengan metode Newton (Traub, 1964), metode Halley (Amat, 2003), metode Newton ganda (Traub, 1964), dan metode Householder (Hoseholder , 1970) yang masing-masing disingkat MHHM, MN, MH, MNG, dan MHH.

Uji simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan bahasa pemograman Maple 13 dengan 850 digit desimal dan kriteria pemberhentian program memenuhi formulasi berikut,

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon . \tag{35}$$

Persamaan (35) merupakan kriteria pemberhentian iterasi dengan $\varepsilon = 10^{-20}$. Simulasi numerik dilakukan dengan mengambil tebakan awal x_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan α. Adapun fungsi-fungsi yang digunakan adalah sebagai berikut

$f_1(x) = \cos(x) - x$, α = 0,739085133215160,
$f_2(x) = (x-2)^2 - \ln(x)$, α = 1,412391172023884,
$f_3(x) = xe^{-x} - 0{,}1$; α = 0,111832559158962,
$f_4(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, α = −1,000000000000000.

Untuk melihat performa metode iterasi, ukuran-ukuran yang digunakan adalah jumlah iterasi, evaluasi fungsi yang digunakan, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi, dan nilai mutlak fungsi. Nilai-nilai dari ukuran ini diberikan masing-masing pada Tabel 2, 3 dan 4. Proses komputasi ini dihitung dengan menggunakan algoritma berulang, proses berulang akan dihentikan jika memenuhi kriteria yang diberikan pada Persamaan (35), sedangkan nilai COC dihitung menggunakan formulasi yang diberikan pada Persamaan (10).

Pada simulasi ini, proses penentuan akar-akar pendekatan pada setiap fungsi menggunakan dua tebakan awal. Nilai dua tebakan awal ini masing-masing lebih kecil dari α dan lebih besar dari α. Hal ini dilakukan untuk melihat laju konvergensi metode iterasi baik dari sebelah kanan akar eksak, maupun dari sebelah kiri akar eksak.

Selanjutnya, jumlah iterasi dan evaluasi fungsi dari masing-masing metode iterasi yang dibandingkan diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2 : Perbandingan Jumlah iterasi dan evaluasi fungsi untuk $\varepsilon = 10^{-20}$

fungsi	x_0	Jumlah Iterasi					Evaluasi fungsi				
		MN	MH	MHH	MNG	MHHM	MN	MH	MHH	MNG	MHHM
$f_1(x)$	0,4	5	3	3	3	3	10	9	9	12	9
	1,1	5	3	3	3	3	10	9	9	12	9
$f_2(x)$	1,0	5	4	4	3	3	10	12	12	12	9
	1,6	5	3	4	3	3	10	9	12	12	9
$f_3(x)$	–0,2	6	4	4	3	3	12	12	12	12	9
	0,2	5	3	4	3	3	10	9	12	12	9
$f_4(x)$	–1,5	5	4	4	3	3	10	12	12	12	9
	0,0	5	4	4	3	3	10	12	12	12	9

Tabel 2 menunjukkan penggunaan iterasi pada proses menghampiri akar-akar persamaan nonlinear yang diberikan dengan mengambil ketelitian $\varepsilon = 10^{-20}$. Berdasarkan Tabel 2 secara umum terlihat dengan jelas bahwa metode iterasi yang diberikan pada Persamaan (20) menggunakan iterasi dan evaluasi fungsi yang lebih sedikit dibandingkan dengan metode iterasi. Hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi tersebut mempunyai efisiensi yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Pada Tabel 1 telah ditunjukkan orde konvergensi dari setiap metode iterasi yang dihasilkan menggunakan ekspansi deret Taylor. Selain itu, berdasarkan nilai-nilai akar pendekatan yang telah diperoleh, maka orde konvergensi suatu metode iterasi dapat dihitung secara komputasi dengan menggunakan Persamaan (10), sebagaimana yang diberikan pada Tabel 3.

Tabel 3 : Perbandingan COC untuk $\varepsilon = 10^{-20}$

Fungsi	x_0	Metode Iterasi				
		MN	MH	MHH	MNG	MHHM
$f_1(x)$	0,4	2,000000	3,000251	3,001315	3,999980	3,998419
	1,1	2,000000	2,999802	2,999450	3.999995	3,999907
$f_2(x)$	1,0	1,999999	3,000000	3,000000	3,999517	3,992243
	1,6	2,000000	3,000574	2,999999	3,999944	3,986538
$f_3(x)$	–0,2	2,000000	2,999996	2,999996	3,999161	3,983934
	0,2	2,000000	3,000311	3,000311	3,999993	3,999137
$f_4(x)$	–1,5	2,000000	3,000002	3,000000	4,000130	3,999785
	0,0	2,000000	3,000278	2,996763	4,000141	3,999785

Tabel 3 mempertegas dan sekaligus memvalidasi orde konvergensi yang diperoleh dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang diberikan pada Persamaan (34).

Tabel 4 memperlihatkan nilai-nilai mutlak fungsi untuk beberapa metode iterasi dengan berdasarkan jumlah total evaluasi fungsi (*total number of functional evaluations* (TNFE)) sebesar sebanyak duabelas. Hal ini berarti jika suatu metode iterasi berorde konvergensi *p* menggunakan sebanyak *d* evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, maka nilai mutlak fungsi dihitung pada iterasi ke−12/*d*.

Tabel 4 : Nilai $|f(x_n)|$ dengan TNFE = 12

Fungsi	x_0	Metode Iterasi				
		MN	MH	MHH	MNG	MHHM
$f_1(x)$	0,4	2,5151(e−67)	1,2943(e−73)	7,3218(e−64)	2,5151(e−67)	1,4496(e−156)
	1,1	5,7008(e−76)	5,1492(e−76)	1,3794(e−72)	5,7008(e−76)	5,2878(e−225)
$f_2(x)$	1,0	7,7902(e−42)	1,6078(e−57)	8,3618(e−46)	7,7902(e−42)	6,3104(e−109)
	1,6	5,8718(e−55)	8,7928(e−72)	9,3272(e−56)	5,8718(e−55)	7,1879(e−97)
$f_3(x)$	−0,2	3,0851(e−36)	2,7757(e−55)	1,1432(e−40)	3,0850(e−36)	2,1670(e−89)
	0,2	2,6790(e−65)	2,9430(e−94)	5,1931(e−74)	3,6790(e−65)	2,8607(e−155)
$f_4(x)$	−1,5	5,7389(e−66)	1,5262(e−43)	7,4069(e−51)	5,7389(e−66)	3,9450(e−251)
	0,0	1,9261(e−65)	6,3918(e−26)	1,1268(e−19)	1,9261(e−65)	2,3968(e−165)

Berdasarkan Tabel 4, secara umum metode iterasi pada Persamaan (20) memiliki nilai mutlak fungsi lebih kecil dibandingkan metode iterasi lainnya yang dihitung untuk setiap fungsi. Hal ini menunjukkan bahwa akurasi dari metode modifikasi Householder lebih baik dibandingkan metode iterasi lainnya.

IV. KESIMPULAN

Modifikasi metode iterasi Householder menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua menghasilkan metode iterasi berorde konvergensi empat untuk $\theta = -1$, $\beta = -1$, dan $\gamma = -3$, dan melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya dengan indeks efisiensi sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}5874$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa orde konvergensi dari metode baru yang dihitung secara komputasi (COC) adalah empat, sebagaimana diberikan pada Tabel 3. Selain itu, berdasarkan Tabel 1, 2, dan 4 secara umum untuk setiap fungsi yang diuji, metode iterasi pada Persamaan (20) mempunyai performa yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Alamsyah dan Wartono, Modifikasi Metode Chauchy tanpa Turunan Kedua dengan Orde Konvergensi Empat, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 3(2), 2017, 59 – 64.

[2]. Amat, S., Busquier, S., dan Gutierrez, J. M., Geometric Construction of Iterative Function to Solve Nonlinear Equations, *Journal of Computational dan Applied Mathematics*, 157, 2003, 197 – 205.

[3]. Amat, S., Busquier, S., Gutierrez, J. M., dan Hernandez, M. A., On the Global Convrgence of Chebyshev's Iterative Method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220, 2008, 17 - 21.

[4]. Argyros, I.K., A Note on the Halley Method in Banach Spaces, *Applied Mathematics and Computation*, 58, 1993, 215 – 224.

[5]. Burden, R. L., dan Faires, J. D., *Numerical Analysis*, Boston, 2011, Brook/Cole Engange Learning.

[6]. Chun, C., Some Variants of Chebyshev–Halley Methods Free from Second Derivative, *Applied Mathematics and Computation*, 191, 2007a, 193-198.

[7]. Some Second-Derivative-Free Variants of Chebyshev-Halley Matehods, *Applied Mathematics and Computation*, 191, 2007b, 410 – 414.

[8]. Chun, C., dan Ham, Y. Some Second-Derivative-Free Variants of Super-Halley Method with Fourth-Order Convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 195, 2008, 537 - 541.

[9]. Epperson, J. F. *Numerical Method and Analysis,* New Jersey, 2013, John Wiley & Sons.

[10]. Gander, W., On Halley's Iteration Method, *The American Mathematical Monthly*, 92(2), 1985, 131 – 134.

[11]. Gutierrez, J. M dan Hernandez, M. A., A family of Chebyshev-Halley Type Methods in Banach Space, *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 55, 1997, 113 – 130.

[12]. Householder, A.S. *The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation,* New York, 1970, McGraw-Hill.

[13]. Kung, H.T., dan Traub, J.F., Optimal Order of One Point and Multipoint Iteration, *Journal of the Association for Computing*, 21, 1974, 643 – 641.

[14]. Melman, A ., Geometry and Convergen of Euler's and Halley's Methods, *SIAM Review*, 39(4), 1997, 726 – 736.

[15]. Traub, J.F. *Iterative Methods for The Solutions of Equations,* New York, 1964, Prentice-Hall, Inc.

[16]. Wartono, Soleh, M., Suryani, I., dan Muhafzan, Chebyshev-Halley's Method without Second Derivative of Eight-Order Convergence. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12(4), 2016, 2987 – 2997.

[17]. Wartono, Soleh, M., Suryani, I., Zulakmal, dan Muhafzan, A New Variant of Chebyshev-Halley's Method Without Second Derivative with Convergence of Optimal Order. *Asian Journal of Scientific Research*, 11(3), 2018, 409 – 414.

[18]. Xiaojian, Z., Modified Chebyshev-Halley Methods Free From Second Derivative, *Applied Mathematics and Computation*, 203, 2008, 824 – 827.

[19]. Yu, X., dan Xu, X., A New Family of Chebyshev-Halley Like Methods Free From Second Derivative, *Fixed Point Theory*, 13(1), 2012, 319 – 325.