Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 19 Nomor 1 Juni 2022 (Halaman 1 - 12)
doi: https://doi.org/10.22487/2540766X.2022.v19.i1.15633

JIMT Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
ISSN : 2540 – 766X

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI GRAF *BUTTERFLY NETWORK LEVEL* 4

C. C. Marzuki[1], R. Satria[2], A. N. Rahma[3] dan A. Faizal[4]

[1,2,3]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
UIN Sultan Syarif Kasim Riau
[4]Program Studi Teknik Elektro, Fakultas Sains dan Teknologi,
UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
[1]corry@uin-suska.ac.id, [2]rikosatriaf@gmail.com,[3]ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id, [4]ahmad.faizal@uin-suska.ac.id

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a graph and k be a positive integer. Total vertex irregularity strength of graph G, denoted by $tvs(G)$ is the minimum largest label which is used to label graph G with total vertex irregular total labeling. Total edge irregularity strength of graph G, denoted by $tes(G)$ is the minimum largest label which is used to label graph G with total edge irregular total labeling. Total irregularity strength of graph G, denoted by $ts(G)$, is the minimum largest label which is used to label graph G with total irregular total labeling. In this research will be found total vertex irregularity strength of butterfly network graph that is $tvs(BF(4)) = 17$, total edge irregularity strength of butterfly network graph that is $tes(BF(4)) = 44$, and total irregularity strength of butterfly network graph that is $ts(BF(4)) = 44$.

Keywords : **Butterfly Network Graph Level 4, Total Vertex Irregularity Strength, Total Edge Irregularity Strength, Total Irregularity Strength, Total Irregular Labeling**

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dan k adalah bilangan bulat positif. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur titik. Nilai total ketakteraturan sisi dari graf G, yang dinotasikan dengan $tes(G)$ yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur sisi. Nilai ketakteraturan total dari graf G, yang dinotasikan dengan $ts(G)$ yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur total. Hasil dari penelitian ini, diperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf butterfly network yaitu $tvs(BF(4)) = 17$, nilai total ketakteraturan sisi dari graf butterfly network yaitu $tes(BF(4)) = 44$, nilai ketakteraturan total dari graf butterfly network yaitu $ts(BF(4)) = 44$.

Kata Kunci : **Graf Butterfly Network Level 4, Nilai Total Ketakteraturan Titik, Nilai Total Ketakteraturan Sisi, Nilai Ketakteraturan Total, Pelabelan Total Tak Teratur.**

I. PENDAHULUAN

Teori graf digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah yang direpresentasikan ke dalam bentuk graf. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan notasi $G = (V, E)$ dimana V himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul [1].

Salah satu topik yang dibahas dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan pemetaan yang memetakan himpunan titik atau himpunan sisi ke suatu bilangan bulat positif yang disebut label. Berdasarkan unsur yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik *(vertex labeling)* adalah pelabelan dengan domain himpunan titik. Pelabelan sisi *(edge labeling)* adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi. Pelabelan total *(total labeling)* adalah pelabelan dengan domain gabungan antara himpunan titik dan himpunan sisi.

Sampai saat ini terdapat beberapa jenis pelabelan graf yang telah dikaji, salah satunya adalah pelabelan-k total tak teratur. Pelabelan-k total tak teratur diperkenalkan oleh Bača, Jendrol, Miller, dan Riyan pada Tahun 2007. Menurut Bača, dkk., pelabelan-k total tak teratur dibedakan menjadi dua jenis yaitu: pelabelan-k total tak teratur titik dan pelabelan-k total tak teratur sisi.

Suatu pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di G memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ [2].

Suatu pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi di G, jika untuk setiap dua sisi berbeda e dan f pada G memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$. Nilai total ketakteraturan sisi dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur sisi, yang dinotasikan dengan $tes(G)$ [2]. I.Rajasingh, dkk. [3], pada Tahun 2012 menentukan nilai total ketakteraturan sisi dari graf *butterfly network* level r, yng dinotasikan dengan $BF(r)$. Di dalam penelitiannya tersebut diperoleh bahwa nilai total ketakteraturan sisi dari graf $BF(3)$ yaitu $tes(BF(3)) = 17$ dan $tes(BF(r)) = \left\lceil \frac{r2^{r+1}+2}{3} \right\rceil, r \geq 4$.

Tahun 2013 Marzuki, Salman, dan Miller memperkenalkan pelabelan-k total tak teratur total yang merupakan hasil pengkombinasian dari pelabelan-k total tak teratur titik dan pelabelan-k total tak teratur sisi. Suatu pelabelan $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ pada G dikatakan pelabelan-k total tak teratur total, jika untuk setiap dua titik berbeda x dan y pada G maka $wt(x) \neq wt(y)$ dan untuk setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 pada G maka $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Nilai ketakteraturan total dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur total, yang dinotasikan dengan $ts(G)$.

Hasil penelitian Marzuki, dkk., pada Tahun 2013 diperoleh bahwa $ts(G) \geq \max\{tes(G), tvs(G)\}$. Di dalam penelitian tersebut, juga diberikan nilai ketakteraturan total dari beberapa graf, diantaranya: $ts(C_n) = \lceil (n+2)/3 \rceil$ untuk $n \geq 3$, $ts(P_n) = \lceil (n+2)/3 \rceil$ untuk $n = 2,5$ dan $ts(P_n) = \lceil (n+1)/3 \rceil$ untuk n yang lainnya. Setelah itu, masih banyak penelitian-penelitian berikutnya mengenai nilai ketakteraturan total ini. Diantaranya penelitian Tilukay dkk. pada paper [4] yang memperoleh nilai ketakteraturan total dari *fan, wheel, triangular book, and friendship graphs*. Hasil penelitian terkait pelabelan graf ini dapat dilihat secara lengkap pada [5].

Pada tahun 2008, Manuel dkk. telah menemukan cara penyajian graf butterfly network dengan efisien pada paper [6]. Kemudian Karunagaran dkk. [7] juga menjelaskan teori dan aplikasi butterfly network pada teori graf. Sedangkan penelitian tentang penentuan nilai ketakteraturan pada graf *butterfly network* ini sudah dilakukan oleh Nurdin pada makalah [8]. Pada makalah tersebut diperoleh nilai total ketakteraturan titik dari *butterfly network level* 2 sebesar 4, nilai total ketakteraturan sisi dari *butterfly network level* 2 sebesar 6, dan nilai ketakteraturan total dari *butterfly network level* 2 sebesar 6. Kemudian pada tahun 2018, Marzuki, dkk. Juga memperoleh nilai total ketakteraturan pada graf *butterfly network level* 3 atau $BF(3)$ pada makalah [9]. Mereka memperoleh nilai total ketakteraturan titik dari *butterfly network level 3* sebesar 7, nilai total ketakteraturan sisi dari *butterfly network level* 3 sebesar 17, dan nilai ketakteraturan total dari *butterfly network level* 3 sebesar 17.

Pelabelan graf telah banyak digunakan dalam berbagai aplikasi, seperti dalam permasalahan model sistem jaringan komunikasi dan lain-lain. Interkoneksi jaringan merupakan rancangan koneksi dari berbagai proses sistem. Interkoneksi jaringan bisa di modelkan dengan suatu graf dimana titik mewakili elemen dan sisi mewakili komunikasi antara saluran. Salah satu bentuk dari interkoneksi jaringan adalah *butterfly network*. Pada paper ini akan ditentukan nilai total ketakteraturan titik, nilai total ketakteraturan sisi dan nilai ketakteraturan total dari salah satu bentuk graf *butterfly network* yaitu graf *butterfly network* level 4.

II. METODE PENELITIAN

2.1. Pengertian Graf

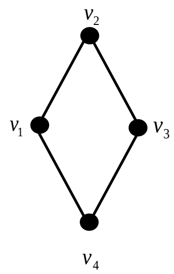
Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan sebagai sisi.

Definisi 1. [1] Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik.

Definisi 1 menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, suatu graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisipun dinamakan graf trivial.

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan tak kosong titik $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, \ldots, e_{n-1} = v_{n-1}v_n\}$. Banyaknya titik dari graf $G = (V, E)$ disebut *order*, yang dinotasikan dengan $|V|$. Sedangkan banyaknya sisi dari graf $G = (V, E)$ disebut *size*, yang dinotasikan dengan $|E|$.

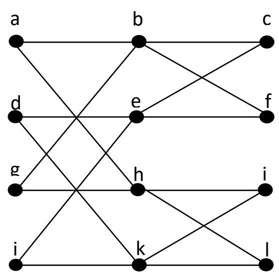
Berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat bahwa himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $BF(1)$ adalah $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dengan $|V| = 4$, dan $E = \{e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_4v_1\}$ dengan $|E| = 4$.



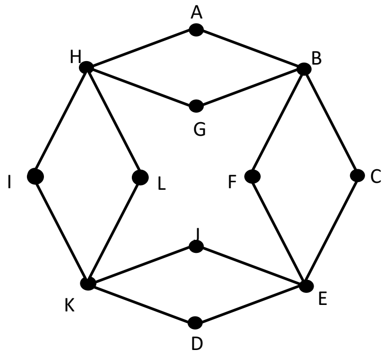
Gambar 1 : Graf $BF(1)$

Graf dapat digambar dengan beragam bentuknya, seperti pada Gambar 2. Meskipun kedua graf terlihat berbeda bentuk dan penamaan titiknya, namun sebenarnya kedua graf tersebut merupakan graf yang sama. Dua buah graf yang sama tetapi secara bentuk berbeda dikatakan graf yang saling isomorfik.

Definisi 2. [1] Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik $(G_1 \cong G_2)$, jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik keduanya dan antara sisi-sisi keduanya, sedeikian sehingga jika sisi e_i bersisian dengan titik u dan v di G_1 maka sisi e yang berkoresponden di G_2 juga harus bersisian dengan titik u' dan v' di G_2.



$G_1 = BF(r)$



$G_2 = BF(r)$

Gambar 2 : Dua Buah Graf *Butterfly* yang Isomorfik $(G_1 \cong G_2)$

Definisi 3. [3] Himpunan titik V dari sebuah graf *butterfly* berdimensi-r $BF(r)$ bersesuaian dengan himpunan berpasangan $[w, i]$ dimana i adalah dimensi atau level dari sebuah titik $(0 \leq i \leq r)$ dan w adalah bilangan biner bit ke-r yang menunjukkan sisi dari titik. Dua titik $[w', i']$ yang saling terhubung dengan sebuah sisi jika dan hanya jika $i' = i + 1$ dan

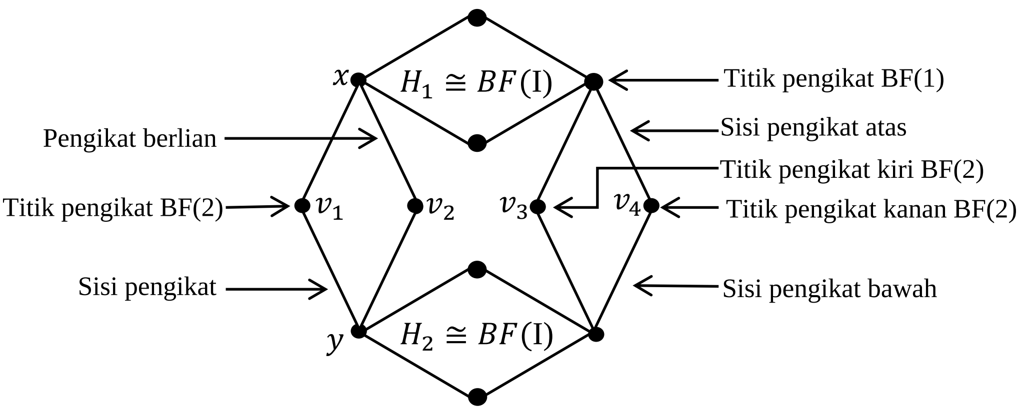
(i) w dan w' sama, atau

(ii) w dan w' berbeda tepat pada bit ke-*i.*

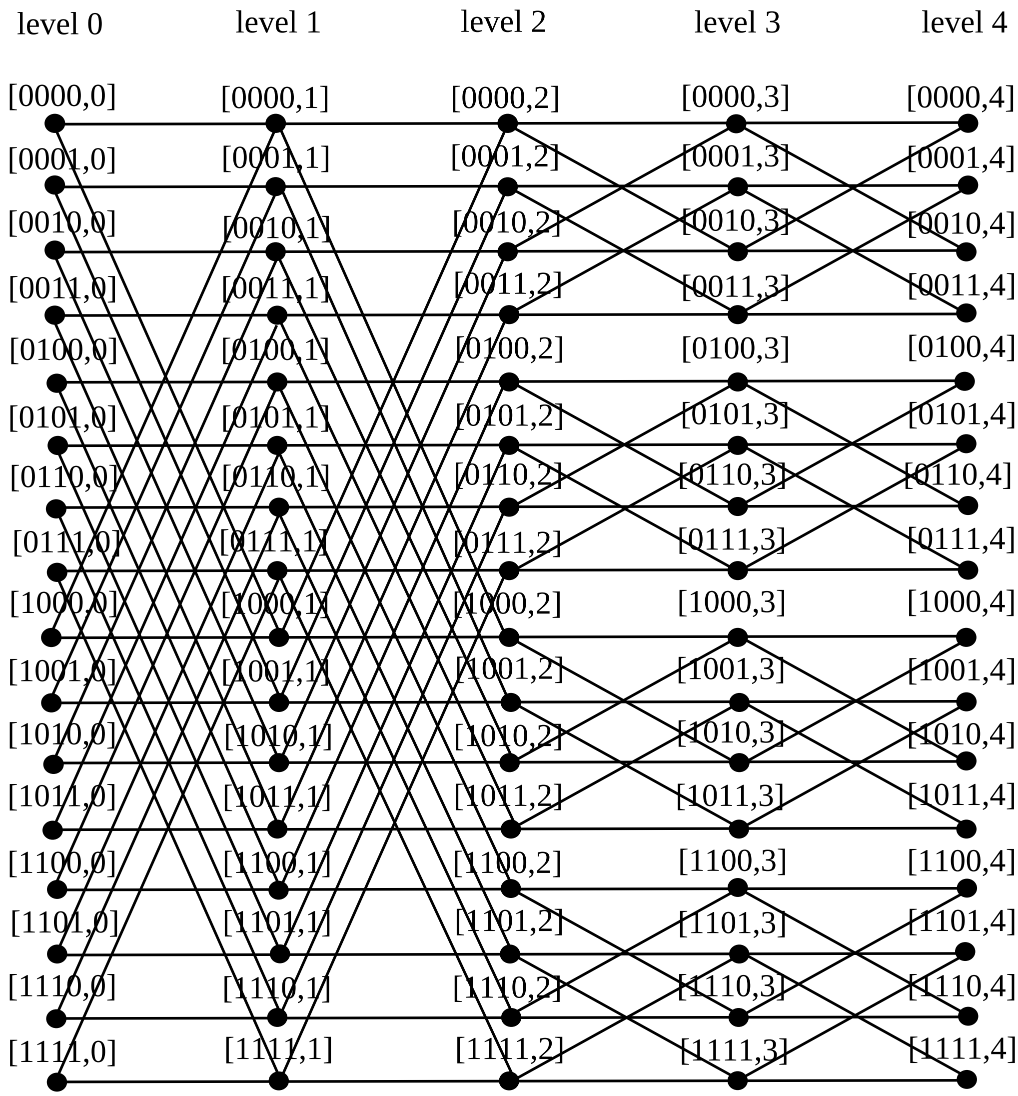
Graf *butterfly* berdimensi-*r BF(r)* memiliki titik $(r+1)2^r$ dan sisi $(r2^{r+1})$

Penggambaran yang efisien untuk *butterfly* dan *benes* telah dilakukan oleh Manuel, dkk, tahun 2005 dalam paper [6]. Graf *butteffly* G_1 pada Gambar 2 adalah gambaran graf *butteffly* berlevel 2 dalam bentuk normal. Sedangkan pada graf *butteffly* G_2 pada Gambar 2 merupakan gambaran graf *butteffly* berlevel 2 alternative yang disebut dengan bentuk berlian. Sebuah berlian yang dimaksud adalah graf lingkaran berukuran 4 titik. Dua titik [*w,i*] dan [*w',i*] merupakan bayangan pencerminan satu sama lain jika *w* dan *w'* berbeda tepat pada bit pertama. Perpindahan dari level 0 menjadi titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{2^r}$ pada $BF(r)$ menghasilkan dua subgraf H_1 dan H_2 pada $BF(r)$, setiap subgrafnya isomorfik terhadap $BF(r-1)$. Dimana $v_1, v_2, \dots, v_{2^r}$ adalah titik potong pada $BF(r)$ yang disebut dengan titik pengikat dari $BF(r)$.

Sebuah graf lingkaran 4 titik xv_1yv_2 pada $BF(r)$, dimana $x \in V(H_1)$, $y \in V(H_2)$ dan v_1, v_2 adalah titik-titik pengikat $BF(r)$ disebut dengan pengikat permata. Sisi pengikat permata disebut dengan sisi pengikat. Untuk lebih jelasnya kita tulis sisi-sisi (x, v_i) sebagai sisi-sisi pengikat atas dan sisi-sisi (y, v_i) sebagai sisi-sisi pengikat bawah. Sisi tersebut merupakan dua titik pengikat $BF(r)$ yang berdekatan ke suatu titik pengikat $BF(r-1)$. Salah satunya disebut dengan titik pengikat kiri dan selebihnya disebut titik pengikat kanan. Lihat Gambar 3.



Gambar 3 : Titik Pengikat dan Sisi Pengikat BF(2)



Gambar 4 : Titik Pengikat dan Sisi Pengikat BF(4)

2.2. Pelabelan Graf

Misalkan diberikan suatu graf $G(V,E)$, maka pelabelan pada G didefinisikan sebagai suatu pemetaan unsur-unsur G (himpunan titik dan himpunan sisi) pada himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan dengan domain himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan dengan domain himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge labeling*) dan pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi disebut pelabelan total (*total labeling*).

Sampai saat ini terdapat beberapa jenis pelabelan graf yang telah dikaji, salah satunya adalah pelabelan-k total tak teratur. Pelabelan-k total tak teratur terdiri dari: pelabelan-k total tak teratur titik, pelabelan-k total tak teratur sisi dan pelabelan-k total tak teratur total.

2.2.1. Pelabelan-k Total Tak Teratur Titik

Pelabelan-k total tak teratur titik pertama kali diperkenalkan oleh Bača, dkk., pada Tahun 2007, dalam jurnal yang berjudul "*On Irregular Total Labellings*".

Definisi 4. [2] Misalkan $G=(V,E)$ adalah sebuah graf. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1,2,\ldots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di G memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$. Untuk graf $G=(V,E)$ bobot titik x yaitu: $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{xy \in E} \lambda(xy)$.

Bača, dkk., juga memperoleh batas bawah dan batas atas nilai total ketakteraturan titik dari suatu graf G, yang dapat dilihat pada Teorema 2.1.

Teorema 1. [2] Misalkan G adalah graf (p,q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ maka,

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$$

2.2.2. Pelabelan-k Total Tak Teratur Sisi

Pelabelan-k total tak teratur sisi juga diperkenalkan oleh Bača, dkk., pada Tahun 2007, dalam jurnal yang berjudul "*On Irregular Total Labellings*".

Definisi 5. [2] Misalkan $G=(V,E)$ adalah sebuah graf. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1,2,\ldots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi di G, jika untuk setiap dua sisi berbeda e dan f pada G memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$. Nilai total ketakteraturan sisi yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur sisi, yang dinotasikan dengan *tes(G)*. Untuk graf $G=(V,E)$ bobot sisi e yaitu: $wt(e) = \lambda(x_1) + \lambda(e) + \lambda(x_2)$. Hasil penelitian Bača, dkk., tentang nilai total ketakteraturan sisi diberikan pada teorema 2.

Teorema 2. [2] Misalkan $G=(V,E)$ sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi tak kosong E maka,

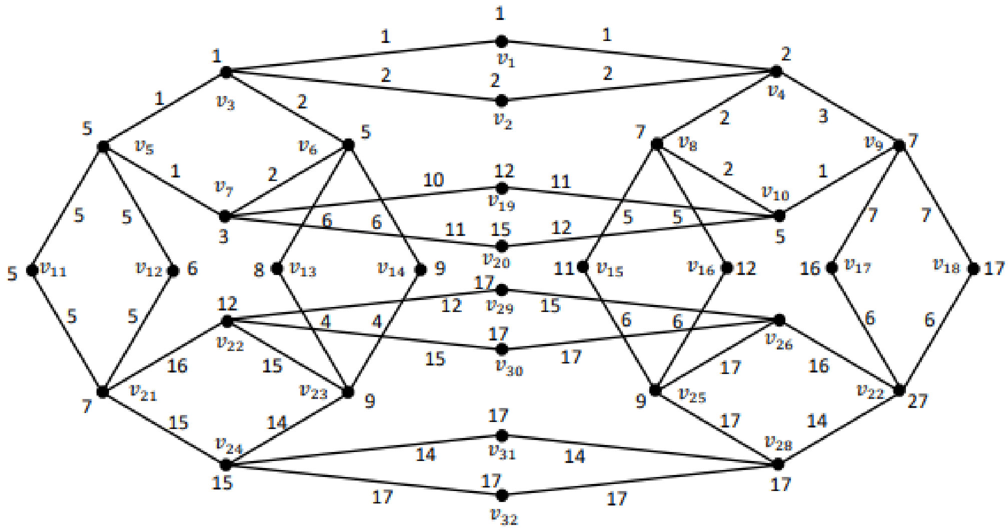
$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

2.2.3. Pelabelan-k Total Tak Teratur Total

Pelabelan-k total tak teratur total diperkenalkan oleh Marzuki, dkk., pada Tahun 2013. Pelabelan-k total tak teratur total merupakan pengkombinasian dari pelabelan-k total tak teratur titik dan pelabelan-k total tak teratur sisi.

Definisi 6. [10] Misalkan $G=(V,E)$ sebuah graf dan pelabelan $f:V\cup E\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ pada G adalah pelabelan-k total tak teratur total, jika untuk setiap dua titik berbeda x dan y pada G maka $wt(x)\neq wt(y)$ dan untuk setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 pada G maka $wt(x_1x_2)\neq wt(y_1y_2)$. Nilai ketakteraturan total yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur total, yang dinotasikan dengan $ts(G)$.

Berikut akan disajikan contoh pelabelan-k total tak teratur total pada graf *butterfly network level* 3 atau $BF(3)$ berdasarkan hasil pelitian Mila Sari pada tahun 2018.



Gambar 5 : Pelabelan-17 Total Tak Teratur Total pada Graf $BF(3)$

Berdasarkan Gambar 5 label maksimum yang digunakan adalah 17. Selanjutnya, akan dihitung bobot setiap titik dan bobot setiap sisi pada graf $BF(3)$, dengan cara menjumlahkan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan titik dan sisi tersebut.

Hasil perhitungan bobot titik dan bobot sisi pada graf $BF(3)$ diperoleh bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi juga berbeda. Oleh karena itu pelabelan f dinamakan pelabelan-17 total tak teratur total pada graf $BF(3)$. Jadi terbukti bahwa label terbesar minimum yang digunakan pada graf $BF(3)$ adalah $ts(BF(3))=17$.

Hasil penelitian Marzuki, dkk., tentang nilai ketakteraturan total diberikan pada teorema-teorema untuk setiap graf G berlaku, $\max\{tes(G),tvs(G)\}\leq ts(G)$.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Teorema 4, 5, dan 6 berikut akan ditentukan nilai total ketakteraturan titik, nilai totall ketakteraturan sisi dan nilai ketakteraturan total dari graf *butterfly network level* 4.

Teorema 4.

Misalkan $BF(4)$ adalah graf *butterfly network level* 4, maka $tvs\big(BF(4)\big) = 17$.

Bukti :

Banyaknya titik pada graf $BF(4)$ adalah $|V(BF(4))| = 80$ dan banyaknya sisi pada graf $BF(4)$ adalah $|E(BF(4))| = 128$, dimana derajat terkecil dari $BF(4)$ adalah $\delta = 2$ dan derajat terbesar dari $BF(4)$ adalah $\Delta = 4$. Berdasarkan Teorema 1 diperoleh batas bawah untuk $tvs(BF(4))$ sebagai berikut:

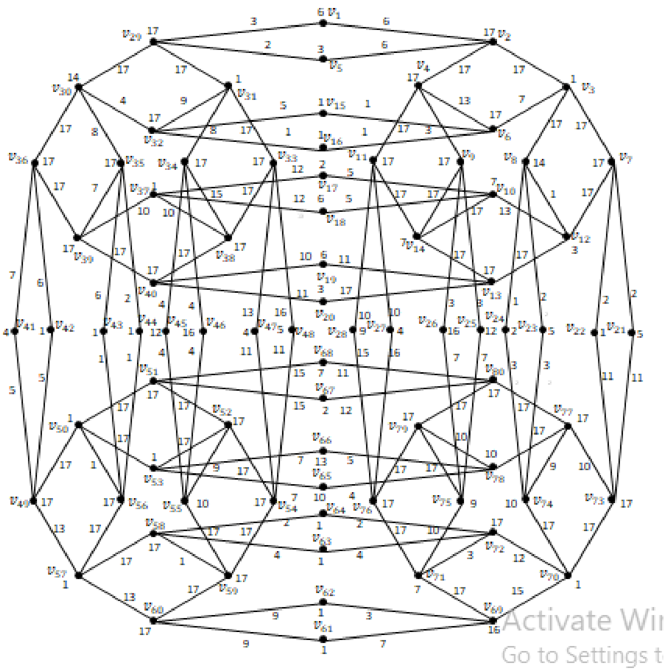
$$tvs(BF(4)) \geq \left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$$

$$tvs(BF(4)) \geq \left\lceil \frac{p(BF(4))+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$$

$$tvs(BF(4)) \geq \left\lceil \frac{80+2}{4+1} \right\rceil$$

$$tvs(BF(4)) \geq 17 \qquad (1)$$

Untuk membuktikan $tvs(BF(4)) \leq 17$ akan dilakukan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan-17 total tak teratur titik pada graf $BF(4)$. Untuk menunjukkan adanya pelabelan-17 total tak teratur titik pada graf $BF(4)$, maka graf $BF(4)$ dilabeli dengan pelabelan total tak teratur titik dengan label terbesarnya adalah 17. Perhatikan Gambar 6.



Gambar 6 : Pelabelan-44 Total Tak Teratur Titik pada Graf $BF(4)$

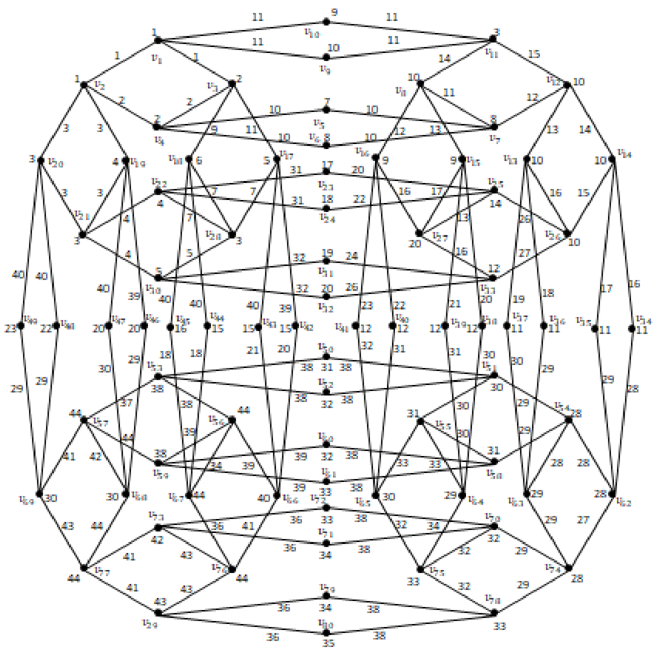
Dengan melabeli graf $BF(4)$ seperti pada Gambar 6 dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan label maksimum 17 diperoleh bobot setiap titiknya berbeda. Oleh karena itu, pelabelan pada Gambar 6 tersebut merupakan merupakan pelabelan-17 total tak teratur titik pada graf $BF(4)$. Sehingga disimpulkan $tvs(BF(4)) \leq 17$. Jadi terbukti bahwa label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf $BF(4)$ adalah $tvs(BF(4)) = 17$.

Teorema 5.
Misalkan $BF(4)$ adalah graf *butterfly network level* 4, maka $tes\big(BF(4)\big) = 44$.

Bukti :
Banyaknya sisi pada graf $BF(4)$ adalah $|E(BF(4))| = 128$. Berdasarkan Teorema 2 diperoleh batas bawah untuk $tes(BF(4))$ sebagai berikut:

$$tes(BF(4)) \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$$
$$tes(BF(4)) \geq \left\lceil \frac{|E(BF(4))|+2}{3} \right\rceil$$
$$tes(BF(4)) \geq \left\lceil \frac{128+2}{3} \right\rceil$$
$$tes(BF(4)) \geq 44 \qquad (2)$$

Untuk membuktikan $tes(BF(4)) \leq 44$ akan dilakukan dengan cara menunjukkan bahwa adanya pelabelan-44 total tak teratur sisi pada graf $BF(4)$. Oleh karena itu, untuk menunjukkan adanya pelabelan-44 total tak teratur sisi pada graf $BF(4)$, maka graf $BF(4)$ dilabeli dengan pelabelan total tak teratur sisi dengan label terbesarnya adalah 44. Perhatikan Gambar 7.



Gambar 7 : Pelabelan-44 Total Tak Teratur Sisi pada Graf $BF(4)$

Dengan melabeli graf $BF(4)$ seperti pada Gambar 7 dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan label maksimum 44 diperoleh bobot setiap sisinya berbeda. Oleh karena itu, pelabelan pada Gambar 7 tersebut merupakan pelabelan-44 total tak teratur sisi pada graf $BF(4)$. Sehingga disimpulkan $tes(BF(4)) \leq 44$. Jadi terbukti bahwa label terbesar minimum yang digunakan pada graf $BF(4)$ adalah $tes(BF(4)) = 44$.

Teorema 6.

Misalkan $BF(4)$ adalah graf *butterfly network level* 4, maka $ts\big(BF(4)\big) = 44$.

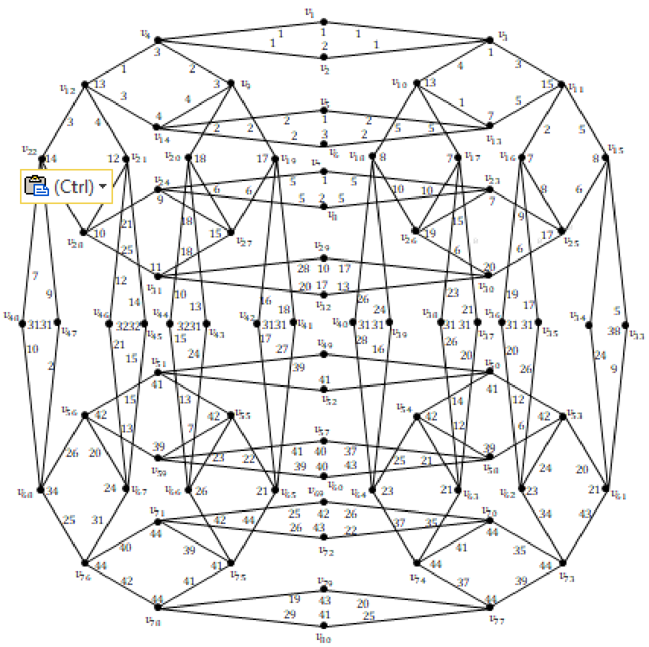
Bukti :

Berdasarkan Teorema 3 diperoleh batas bawah untuk nilai ketakteraturan total graf $BF(4)$, adalah

$$ts(BF(4)) \geq max\{tes(BF(4)), tvs(BF(4))\}$$

Dari Teorema 4 dan 5 diperoleh $ts(BF(4)) \geq max\{tes\big(BF(4)\big), tvs\big(BF(4)\big)\} = max\{44, 17\} = 44$.

Untuk membuktikan $ts(BF(4)) \leq 44$ akan dilakukan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan-44 total tak teratur total pada graf $BF(4)$. Oleh karena itu, untuk menunjukkan adanya pelabelan-44 total tak teratur total pada graf $BF(4)$, maka graf $BF(4)$ dilabeli dengan pelabelan total tak teratur total dengan label terbesarnya 44. Perhatikan Gambar 8.



Gambar 8 : Pelabelan-17 Total Tak Teratur Total pada Graf $BF(4)$

Dengan melabeli graf $BF(4)$ seperti pada Gambar 8 dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan label maksimum 44 diperoleh bobot setiap titiknya berbeda dan bobot setiap sisinya juga berbeda. Oleh karena itu, pelabelan pada Gambar 8 tersebut merupakan pelabelan-44 total tak teratur total pada graf $BF(4)$. Sehingga disimpulkan $ts(BF(4)) \leq 44$. Jadi terbukti bahwa label terbesar minimum yang digunakan pada graf $BF(4)$ adalah $ts(BF(4)) = 44$.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari hasil dan pembahasan tentang nilai total ketakteraturan titik, nilai total ketakteraturan sisi dan nilai ketakteraturan total dari graf $BF(4)$ disimpulkan bahwa $tvs\big(BF(4)\big) = 17$, $tes\big(BF(4)\big) = 44$ dan $ts\big(BF(4)\big) = 44$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. R. Munir, "Matematika Disktrit," *Inform. Bandung*, pp. 281–308, 2010.

[2]. M. Bača, S. Jendrol', M. Miller, and J. Ryan, "On irregular total labellings," *Discrete Math.*, vol. 307, no. 11–12, pp. 1378–1388, 2007, doi: 10.1016/j.disc.2005.11.075.

[3]. I. Rajasingh, B. Rajan, and S. Teresa Arockiamary, "Total Edge Irregularity Strength of Butterfly Networks," *Int. J. Comput. Appl.*, vol. 49, no. 3, pp. 19–22, 2012, doi: 10.5120/7607-0642.

[4]. M. I. Tilukay, A. N. M. Salman, and E. R. Persulessy, "On the Total Irregularity Strength of Fan, Wheel, Triangular Book, and Friendship Graphs," *Procedia Comput. Sci.*, vol. 74, no. 1, pp. 124–131, 2015, doi: 10.1016/j.procs.2015.12.087.

[5]. J. A. Gallian, "A dynamic survey of graph labeling," *Electron. J. Comb.*, vol. 1, no. DynamicSurveys, 2018.

[6]. P. D. Manuel, M. I. Abd-El-Barr, I. Rajasingh, and B. Rajan, "An efficient representation of Benes networks and its applications," *J. Discret. Algorithms*, vol. 6, no. 1, pp. 11–19, 2008, doi: 10.1016/j.jda.2006.08.003.

[7]. K. Karunagaran, P. Sumathi, and V. Nandakumar, "Theory and Applications of Butterfly Network in Graph Theory," pp. 4067–4070, 2015, doi: 10.15680/IJIRSET.2015.04061199.

[8]. Nurdin, "Total irregular labeling of butterfly network on level two," *AIP Conf. Proc.*, vol. 1867, no. August, 2017, doi: 10.1063/1.4994470.

[9]. C. C. Marzuki, M. Sari, and F. Aryani, "Nilai Total Ketakteraturan Dari Graf Butterfly Network Level 3," vol. 12, no. November, pp. 2579–5406, 2019.

[10]. C. C. Marzuki, A. N. M. Salman, and M. Miller, "On the total irregularity strength of cycles and paths," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 82, no. 1, 2013.