Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 19 Nomor 1 Juni 2022 (Halaman 111 - 116)
doi: https://doi.org/10.22487/2540766X.2022.v19.i1.15658

JIMT Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan

ISSN : 2540 – 766X

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF SEHATI

K. Atmadja

Fakultas Sains dan Teknologi Informasi, Institut Sains dan Teknologi Nasional Jakarta
Jl. Moh. Kahfi II Bhumi Srengseng indah, Jagakarsa, Jakarta Selatan 12640
kurniawan_atmadja@istn.ac.id

ABSTRACT

The graph can be written in $G(V,E)$ or G. The graph G consists of the empty set of vertices V and the side set E . Multiple vertices as $|V|$ notation. Notation $|E|$ as many sides. Harmonic labelling $|E|>|V|$. Harmonic labeling of graph is an injective function f from set of vertices to set of integers modulo $|E|$ which generates the bijective function f^* from set of sides (xy) to set of integers modulo $|E|$ with $f^*(xy)=f(x)+f(y)(mod\ |E|)$ which produces a different side label. If graph $G(V,E)$ can be labeled as harmonic, then graph $G(V,E)$ is a Harmonic Graph. The research methodology begins by taking a harmonic graph, namely the triangular ladder graph LS_n as a simple and connected graph class containing triangular circles. The research begins on a graph consisting of generalized triangular circles, modified to resemble a heart shape. Then, added three arcs as a connector. The result obtained is a connected graph construction, which is in the form of a heart in a row, called a graph of heart. The goal is to increase the collection of harmonic graphs. The final result of this research is to show the one-sided graph is a harmonic graph.

Keywords : Graph Of One Heart, Graph Labeling, Harmonic Labeling, Triangular Ladder Graph

ABSTRAK

Graf dapat ditulis $G(V,E)$ atau dapat ditulis G. Graf G terdiri dari himpunan tak kosong simpul V dan himpunan sisi E. Banyak simpul sebagai notasi $|V|$. Notasi $|E|$ sebagai banyak sisi. Pelabelan harmonis memenuhi syarat $|E|>|V|$. Pelabelan Harmonis dari sebuah graf merupakan fungsi injektif f dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat modulo $|E|$ yang membangkitkan fungsi bijektif f^* dari himpunan sisi (xy) ke himpunan bilangan bulat modulo $|E|$ dengan $f^*(xy)=f(x)+f(y)(mod\ |E|)$ yang menghasilkan label sisi berbeda. Apabila graf $G(V,E)$ dapat dilabel harmonis, maka graf $G(V,E)$ termasuk Graf Harmonis. Metodologi penelitian ini diawali dengan mengambil graf harmonis, yaitu graf tangga segitiga LS_n sebagai kelas graf terhubung dan sederhana yang memuat bulatan segitiga. Penelitian dimulai pada graf yang terdiri atas bulatan segitiga yang digeneralisasi, lalu dimodifikasi seperti bentuk hati. lalu, ditambahkan tiga buah sisi sebagai penghubung untuk menghubungkannya kembali. Hasil yang didapat berupa konstruksi graf terhubung, yang berbentuk hati berderet memanjang, dan dinamakan graf sehati. Tujuan yang dicapai adalah menambah koleksi graf harmonis. Hasil akhir dari kajian penelitian ini adalah menunjukkan bahwa graf sehati merupakan graf harmonis.

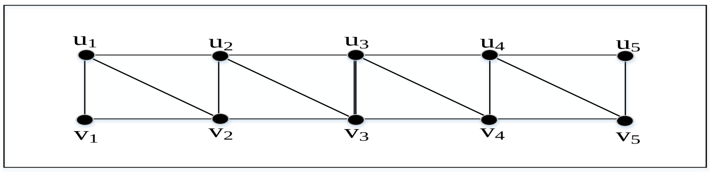
Kata Kunci : Graf Sehati, Graf Tangga Segitiga, Pelabelan Graf, Pelabelan Harmonis

I. PENDAHULUAN

Salah satu dari materi teori graf yaitu mempelajari pelabelan graf. Graf sering ditulis $G(V,E)$ atau G. Jika notasi $|V| = p$ menyatakan banyak simpul, dan notasi $|E| = q$ menyatakan banyak sisi. Dalam kajian penelitian ini, dibahas tentang pelabelan harmonis pada graf $G(V,E)$. Pada graf harmonis dipenuhi syarat $|E| > |V|$. Pelabelan suatu graf G adalah sebuah pemetaan yang membawa elemen – elemen graf ke himpunan bilangan bulat positip. Elemen – elemen graf terdiri dari himpunan simpul dan sisi. Pelabelan harmonis adalah fungsi injektif f dari himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat modulo $|E|$ yang membangkitkan fungsi bijektif f^* dari himpunan sisi (xy) ke himpunan bilangan bulat modulo $|E|$ dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\,|E|)$ yang menghasilkan label sisi yang berbeda (Graham and Sloane, 1980). Beberapa temuan graf yang berkaitan dengan kelas graf terhubung tak berarah dan sederhana, kini telah dikategorikan sebagai graf harmonis antara lain : graf tangga segitiga LS_n(Kurniawan Atmadja et al., 2014), graf tangga segitiga variasi X_n(Atmadja, Kurniawan; A Sugeng, 2017),Graf tangga segitiga ganda LG_n (Kurniawan Atmadja, 2018), Graf gabungan tangga segitiga dan graf segitiga variasi (Kurniawan, 2019), Graf tangga segitiga jembatan LJ_n (Atmadja, 2020), graf tangga segiempat variasi(Kurniawan Atmadja, 2020), graf tangga segitiga pita(Kurniawan Atamdja, 2021). Lebih lengkapnya dapat dilihat informasi melalui Gallian Survey (Gallian, 2018) mengenai pelabelan harmonis. Kajian penelitian graf harmonis sungguh menarik, mengingat pelabelan graf harmonis yang diteliti, senantiasa selalu mendapat label bobot simpul dan sisi yang terdistribusi secara teratur sesuai kaidah – kaidah pelabelan harmonis, yakni bersifat injektif. Ketertarikan dari temuan demi temuan tersebut, kian mendorong gairah semangat didalam melanjutkan penelitian graf harmonis, dengan tujuan mengoleksi perbendaharaan graf harmonis sebagai kekayaan pustaka pada bidang graf. Pada makalah ini, diteliti sebuah temuan graf terbaru yang terinspirasi dari sebuah graf tangga segitiga LS_n. Dengan mengambil Graf LS_2 lalu dimodifikasi dan digeneralisasi sedemikian rupa, dengan menambah tiga buah sisi, sedemikian sehingga didapat konstruksi kelas graf terhubung, dan menemukan konstruksi graf terbaru membentuk seperti hati yang berderet memanjang. Hasil temuan konstruksinya dinamakan graf sehati. Bangunan konstruksi graf sehati memiliki banyak simpul $p = 4n$, dan banyak sisi $q = 8n - 3$, dalam hal ini memenuhi syarat $q \geq p\,; n \in$ bilangan bulat positip. Pada kajian graf sehati, diteliti dan ditunjukan graf sehati sebagai graf harmonis.

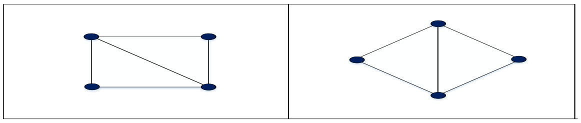
II. METODE PENELITIAN

Terlebih dahulu diberikan graf tangga segitiga LS_n, dengan banyak simpul $p = 2n$, banyak sisi $q = 4n - 3$. Untuk $n = 5$, graf tangga LS_5 disajikan pada Gambar 1.



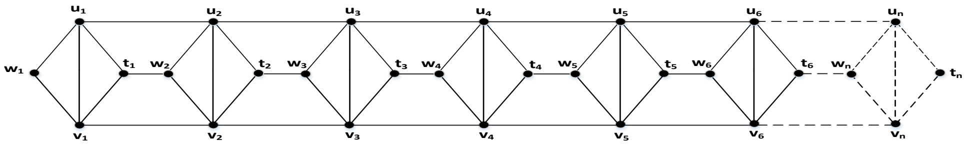
Gambar 1 : Graf LS_5

Dengan mengambil $n = 2$ pada graf LS_n, maka banyak simpul $p = 4$, dan banyak sisi $q = 5$. Berikut graf LS_2 dan hasil modifikasinya disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2 : LS_2 dan hasil modifikasinya

Hasil modifikasinya diberi nama graf sehati. Penambahan 3 buah sisi pada graf sehati, kemudian dihubungkannya kembali dan seterusnya. Diperlihatkan pada Gambar 3.



Gambar 3 : Graf sehati

Dengan demikian metodologi penelitian ditempuh langkah – langkah sebagai berikut :1. Mengambil LS_2 2. Memodifikasi LS_2 3. Menambahkan 3 sisi. 3. Mengkonstruksi seperti pada gambar 3. 4. Memberi label pada setiap simpul dan sisi. 5. Membuktikan secara formal sesuai kaidah – kaidah pelabelan harmonis.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 1: Graf tangga segitiga LS_n $(n > 2)$ adalah graf dengan himpunan simpul $V(G) = \{u_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Definisi 2: Graf Sehati adalah graf dengan himpunan simpul $V(G) = \{u_i, v_i, t_i, w_i | 1 \leq i \leq n\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{u_i w_i,\ u_i t_i,\ u_i v_i,\ w_i v_i,\ t_i v_i, | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1}, t_i w_{i+1}, v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n = 1\}$. Berikut dibahas teorema dan pembuktian berkaitan hasil kajian temuan graf sehati yang terangkum di bawah ini.

Teorema: Graf sehati adalah harmonis.

Bukti. Misalkan himpunan simpul $V(G) = \{u_i, v_i, t_i, w_i | 1 \leq i \leq n\}$

Definisikan pelabelan simpul $f: V \rightarrow Z_{|E|}$ sebagai berikut:

$$f(u_i) = 4i - 3;\ 1 < i < n\ \in \{1, 5, 9, 13, \dots, 4n - 3\} \subseteq (1 \bmod 4) = \bar{1} \qquad (1)$$

$$f(v_i) = 4i - 2;\ 1 < i < n \in \{2, 6, 10, 14, \dots, 4n - 2\} \subseteq (2 \bmod 4) = \bar{2} \qquad (2)$$

$$f(t_i) = 4i - 1;\ 1 < i < n \in \{3, 7, 11, 15, \dots, 4n - 1\} \subseteq (3 \bmod 4) = \bar{3} \qquad (3)$$

$$f(w_i) = 4i - 4;\ 1 < i < n\ \in \{0, 4, 8, 12, \dots, 4n - 4\} \subseteq (0 \bmod 4) = \bar{0} \qquad (4)$$

Dapat ditulis keanggotaan label simpul dari persamaan (*1*) sampai (*4*) dengan mendaftar keanggotaannya dalam himpunan $f(V(G)) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots, 4n - 1\}$. Anggota label simpul terkecil terletak pada simpul w_1, yaitu $f(w_1) = 0$. Anggota label simpul terbesar adalah t_n yaitu $f(t_n) = 4n - 1$.

Dapat diamati bahwa setiap anggota label simpul terdiri dari bilangan bulat positip, dan setiap anggota label simpul memiliki label berbeda. Dengan demikian f memenuhi sebuah pemetaan dari sebuah himpunan simpul ke himpunan bilangan bulat positip $f: V \to \mathbb{Z}_{|E|}$, dan fungsi f adalah fungsi injektif.

Pelabelan f akan menginduksi pelabelan sisi sebagai berikut :

$$f^*(u_i w_i) = f(u_i) + f(w_i) = 4i - 3 + 4i - 4 = 8i - 7;\ 1 < i < n$$
$$\in \{1, 9, 17, 25, \ldots, 8n - 7\} \subseteq (1 \bmod 8) = \bar{1} \tag{5}$$
$$f^*(u_i t_i) = f(u_i) + f(t_i) = 4i - 3 + 4i - 1 = 8i - 4;\ 1 < i < n$$
$$\in \{4, 12, 20, 28, \ldots, 8n - 4\} \subseteq (4 \bmod 8) = \bar{4} \tag{6}$$
$$f^*(u_i v_i) = f(u_i) + f(v_i) = 4i - 3 + 4i - 2 = 8i - 5;\ 1 < i < n$$
$$\in \{3, 11, 19, 27, \ldots, 8n - 5\} \subseteq (3 \bmod 8) = \bar{3} \tag{7}$$
$$f^*(w_i v_i) = f(w_i) + f(v_i) = 4i - 4 + 4i - 2 = 8i - 6;\ 1 < i < n$$
$$\in \{2, 10, 18, 26, \ldots, 8n - 6\} \subseteq (2 \bmod 8) = \bar{2} \tag{8}$$
$$f^*(t_i v_i) = f(t_i) + f(v_i) = 4i - 1 + 4i - 2 = 8i - 3;\ 1 < i < n$$
$$\in \{5, 13, 21, 29, \ldots, 8n - 3\} \subseteq (5 \bmod 8) = \bar{5} \tag{9}$$
$$f^*(u_i u_{i+1}) = f(u_i) + f(u_{i+1}) = 4i - 3 + 4(i + 1) - 3 = 8i - 2;\ 1 < i < n - 1$$
$$\in \{6, 14, 22, 30, \ldots, 8n - 10\} \subseteq (6 \bmod 8) = \bar{6} \tag{10}$$
$$f^*(t_i w_{i+1}) = f(t_i) + f(w_{i+1}) = 4i - 1 + 4(i + 1) - 4 = 8i - 1;\ 1 < i < n - 1$$
$$\in \{7, 15, 23, 31, \ldots, 4n - 9\} \subseteq (7 \bmod 8) = \bar{7} \tag{11}$$
$$f^*(v_i v_{i+1}) = f(v_i) + f(v_{i+1}) = 4i - 2 + 4(i + 1) - 2 = 8i;\ 1 < i < n - 1$$
$$\in \{8, 16, 24, 32, \ldots, 8n\} \subseteq (8 \bmod 8) = \bar{0} \tag{12}$$

Anggota himpunan label sisi dari persamaan (*6*) sampai dengan (*12*) dapat didaftar sebagai himpunan label busur $f^*(E(G)) = \{1,2,3,4,5,6,7,8 \ldots, 8n\}$. Terlihat jelas bahwa setiap sisi (xy) yang diberi label mengikuti pelabelan busur $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\ |E|)$ menghasilkan label busur yang berbeda. Banyak sisi $|E|$, dan label sisi yang dihasilkan adalah $1,2,3, \ldots, |E|$, menunjukan label sisi yang bijektif. Atas dasar kaidah - kaidah pelabelan harmonis, maka graf sehati merupakan graf harmonis.

3.1. Graf Sehati dan Pelabelannya

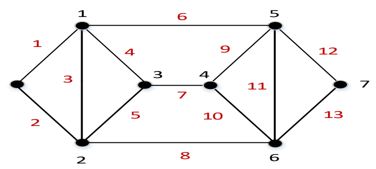
Terlebih dahulu disajikan tabel distribusi berkaitan banyak simpul p dan banyak sisi q. Perhitungan banyak simpul p dan banyak sisi q dikemas pada Tabel 1.

Tabel 1 : Distribusi simpul p dan sisi q

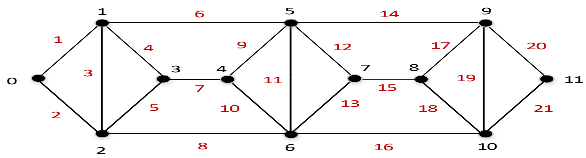
n	Banyak simpul	Banyak sisi
2	8	5
3	12	21
6	24	45
n	4n	8n – 3

Catatan: Graf sehati $p = 4n$; $q = 8n - 3$

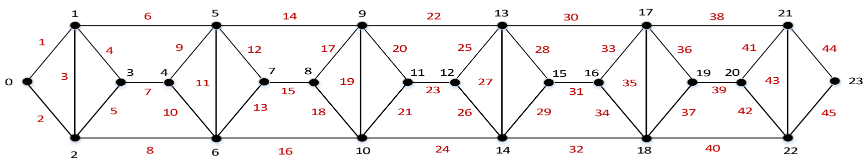
Di bawah ini, berturut – turut ditayangkan konstruksi berikut pelabelan graf sehati sesuai distribusi simpul dan sisi untuk $n = 2$, $n = 3$, dan $n = 6$. Konstruksi graf beikut pelabelannya disajikan masing – masing pada Gambar 4, Gambar 5, dan Gambar 6.



Gambar 4 : Graf Sehati, $n = 2$.



Gambar 5 : Graf Sehati, $n = 3$.



Gambar 6 : Graf Sehati, $n = 6$

IV. KESIMPULAN

Graf Sehati adalah hasil modifikasi dan generalisasi graf tangga segitiga LS_n. Sesuai hasil pembahasan, pelabelan Graf Sehati menunjukan kaidah – kaidah pelabelan harmonis, di mana pelabelan simpulnya mengikuti sebuah pemetaan $f: V \to Z_{|E|}$, bersifat injektif, dan membangkitkan pelabelan sisi (xy) dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\ |E|)$ yang menghasilkan label sisi berbeda. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa Graf Sehati terbukti sebagai Graf harmonis.

Sangat dimungkinkan untuk diteliti lebih lanjut berkaitan dengan kelas graf terhubung graf harmonis, sehingga dengan penelitian topik ini diharapkan mendapat lanjutan konstruksi graf harmonis yang menuntut eksplorasi lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Atmadja, Kurniawan; A Sugeng, K. (2017) Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Variasi Xn. *Prosiding SNM*, 3 (Kombinatorik): 642–647.

[2]. Atmadja, K. (2020) “Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Jembatan.” In *Prosiding Seminar Nasional Matematika*. 2020. FMIPA UNNES. pp. 25–28.

[3]. Gallian, J.A. (2018) A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 1 (DynamicSurveys).

[4]. Graham, R.L. and Sloane, N.J.A. (1980) ON ADDITIVE BASES AND HARMONIOUS GRAPHS*. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1 (4): 382–404.

[5]. Kurniawan (2019) Pelabelan Harmonis Gabungan Graf Tangga Segitiga LSn , dengan Graf Tangga Segitiga Variasi Xn. *Rekayasa Informasi*, 8 (1): 46–51.

[6]. Kurniawan Atamdja (2021) *PELABELAN HARMONIS PADA GRAF TANGGA SEGITIGA PITA HARMONIC LABELING ON TRIANGLE LADDER GRAPH.*, 4 (1): 1–6.

[7]. Kurniawan Atmadja (2018) “Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga Ganda LGn.” In *Konferensi Nasional Matematika XIX-2018*. 2018. IndoMS. pp. 163–167.

[8]. Kurniawan Atmadja (2020) “Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segi Empat Variasi.” In *Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya*. Malang, 2020. FMIPA Universitas Negeri Malang. pp. 320–324.

[9]. Kurniawan Atmadja, Sugeng, K.A. and Yuniarko, T. (2014) “Pelabelan Harmonis Pada Graf Tangga Segitiga.” In *Konferensi Nasional Matematika XVII*. 2014. FMIPA ITS. pp. 1435–1440.