

## SISTEM DINAMIK PENYEBARAN *CORONAVIRUS DISEASE* DENGAN MEMPERTIMBANGKAN VAKSINASI

Kamelia Rasyid<sup>1</sup>, Novianita Achmad<sup>2</sup>, Agusyarif Rezka Nuha<sup>3\*</sup>, Resmawan<sup>4</sup>, Sri Lestari  
Mahmud<sup>5</sup>, La Ode Nashar<sup>6</sup>, dan Asriadi<sup>7</sup>

<sup>1,2,3\*,4,5,7</sup>Program Studi Matematika, Universitas Negeri Gorontalo

<sup>6</sup>Program Studi Statistika, Universitas Negeri Gorontalo

<sup>3\*</sup>[agusyarif@ung.ac.id](mailto:agusyarif@ung.ac.id)

### ABSTRACT

Coronavirus (COVID-19) is a type of infectious disease caused by a new type of coronavirus discovered in 2019, which is hereinafter to as Sars-Cov 2 (Severe acute respiratory syndrome coronavirus 2). This study aims to build a mathematical model, determine fixed points, find a fixed-point stability analysis, determine the value of the primary reproductive number ( $R_0$ ), create a simulation model, and biological interpretation. The results of the analysis of the two fixed points show that the disease-free fixed point will be asymptotically stable if  $R_0 < 1$ , while the endemic fixed point will be asymptotically stable if  $R_0 > 1$ . Furthermore, to illustrate the dynamics of disease spread, a numerical simulation is carried out which provides an interpretation that increasing vaccine delivery is a way that can be done to reduce the spread of COVID-19 disease.

**Keywords** : Covid-19, Mathematical Models, SVEIAR, Vaccines

### ABSTRAK

*Coronavirus Disease* (COVID-19) adalah jenis penyakit menular yang disebabkan oleh *coronavirus* jenis baru yang ditemukan pada tahun 2019 yang selanjutnya disebut Sars-Cov 2 (severe acute respiratory syndrome coronavirus 2). Tujuan penelitian ini adalah membangun model matematika, penentuan titik tetap, mencari analisis kestabilan titik tetap, menentukan nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), membuat simulasi model, dan interpretasi biologis. Hasil analisis terhadap dua titik tetap diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik apabila  $R_0 < 1$ , sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik apabila  $R_0 > 1$ . Selanjutnya, untuk mengilustrasikan dinamika penyebaran penyakit dilakukan simulasi numerik yang memberikan interpretasi bahwa peningkatan pemberian vaksin adalah cara yang bisa dilakukan untuk mengurangi penyebaran penyakit COVID-19.

**Kata kunci** : Covid-19, Model Matematika, SVEIAR, Vaksin.

## I. PENDAHULUAN

COVID-19 adalah jenis penyakit menular dengan gejala gangguan pernapasan akut seperti demam, batuk, sesak napas yang dapat menyebabkan pneumonia, sindrom pernapasan akut, gagal ginjal, bahkan kematian (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2020). Akan tetapi, tidak menutup kemungkinan orang yang tidak memiliki tanda dan gejala COVID-19, jika diperiksa dapat terindikasi positif COVID-19 atau biasa disebut dengan OTG (orang tanpa gejala) (Susilo *et al.*, 2020). Penyakit ini menjadi salah satu topik pembicaraan utama karena dampak yang diakibatkannya, sehingga membuat banyak pihak untuk terjun langsung mengambil langkah-langkah aktif dalam menemukan solusi penanganan kesehatan dan sarana pencegahan agar dampak yang ditimbulkan dapat diminimalisir. Beberapa upaya penangkalan yang dilakukan oleh pemerintah khususnya di Indonesia diantaranya adalah himbauan memakai masker, mencuci tangan dengan bersih, dan menjaga jarak. Selain itu, salah satu program pemerintah dalam menanggulangi penyebaran COVID-19 adalah dengan pemberlakuan program vaksinasi bagi masyarakat luas untuk meningkatkan imun atau daya tahan tubuh setiap individu rentan (Kementerian Komunikasi dan Informatika RI, 2021).

Ditinjau dari sudut pandang matematika, fokus penanganan penyakit ini berkaitan erat dengan implementasi model matematika dalam mempelajari, memahami dan menganalisis karakteristik serta dinamika penyebaran COVID-19 untuk mendapatkan solusi dari masalah penyebaran penyakit tersebut. Penyebaran penyakit COVID-19 telah banyak diteliti dalam perspektif pemodelan matematika diantaranya penelitian oleh (Annas *et al.*, 2020) yang membahas model matematika tipe SEIR dengan mempertimbangkan faktor vaksinasi dan isolasi, (Resmawan, Nuha and Yahya, 2021) yang membahas model transmisi COVID-19 dengan penerapan karantina bagi individu terinfeksi, serta penelitian yang dilakukan oleh (Nuha, Achmad and Supu, 2021) dengan bahan kajian model matematika tipe SVIR pada penyebaran COVID-19 dengan parameter utama tingkat vaksinasi. Selain itu, juga terdapat penelitian oleh (Kifle and Obsu, 2022) yang merumuskan dan menganalisis model matematika deterministik nonlinier untuk menganalisa dinamika transmisi COVID-19. Beberapa penelitian terkait yang membahas model penyebaran COVID-19 dapat ditemukan pada (Lounis and Bagal, 2020; Abioye *et al.*, 2021; Alenezi, Al-Anzi and Alabdulrazzaq, 2021; Seddighi Chaharborj *et al.*, 2021).

Seiring dengan berjalannya waktu, dikarenakan keterbatasan ruangan atau tempat yang akan dijadikan karantina, kebijakan penerapan karantina bagi pasien COVID-19 tidak diberlakukan lagi secara menyeluruh. Namun, pemerintah tetap berupaya untuk menekan angka penyebaran COVID-19 dengan terus mengadakan program vaksinasi di seluruh wilayah Indonesia. Sehingga pada penelitian ini, diperkenalkan model baru berupa penambahan variabel vaksin pada model yang mengacu dari (Resmawan, Nuha and Yahya, 2021). Model yang dirumuskan sudah tidak mempertimbangkan populasi karantina, agar sesuai dengan kondisi terkini dalam upaya pencegahan penyebaran COVID-19.

Model ini mengasumsikan individu yang telah melakukan vaksinasi kemungkinan masih dapat tertular COVID-19 jika berkontak langsung dengan individu yang terinfeksi COVID-19. Namun, gejala yang dialami tidak seberat individu yang tidak melakukan vaksinasi serta dapat meminimalisir terjadinya resiko kematian. Model tersebut selanjutnya akan dianalisis yang diawali dengan menentukan titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasarnya. Kemudian, dilakukan analisis sifat kestabilan dari setiap titik kesetimbangan dengan ambang batas bilangan reproduksi dasar. Perhitungan dilengkapi dengan simulasi numerik untuk melihat dinamika populasi manusia akibat penyebaran COVID-19 serta pengaruh vaksinasi dalam menekan jumlah kasus infeksi.

## **II. METODE PENELITIAN**

Penelitian ini menitikberatkan pengembangan model matematika tipe SVEAIR dengan merujuk pada teori-teori terkait karakteristik dan sifat penyebaran COVID-19. Adapun langkah-langkah yang dilakukan terdiri dari: (1) identifikasi dan perumusan masalah, (2) transformasi masalah ke dalam bentuk model matematika, (3) penyusunan kajian teori yang relevan dengan penyelesaian model matematika, (4) analisis model, dan (5) perumusan kesimpulan.

Untuk analisis model, langkah-langkah yang dilakukan mencakup: (1) merumuskan skenario dinamika penyebaran COVID-19 dalam bentuk sistem persamaan diferensial, (2) mengidentifikasi keberadaan titik tetap model, (3) merumuskan bilangan reproduksi dasar, (4) menentukan syarat dan sifat kestabilan titik tetap yang dikaitkan dengan nilai bilangan reproduksi dasar, (5) menentukan solusi model dalam bentuk simulasi numerik, (6) menginterpretasikan hasil simulasi dalam konteks fenomena nyata.

## **III. HASIL DAN PEMBAHASAN**

### **3.1. Model Matematika**

Penelitian ini membahas model matematika penyebaran COVID-19 tipe SVEIAR. Pembentukan model diawali dengan membagi populasi manusia kedalam enam kelas populasi yaitu S menyatakan individu yang rentan, V menyatakan individu yang divaksin (memiliki daya tahan tubuh aktif dari proses vaksinasi untuk melawan COVID-19), E menyatakan individu terpapar atau dalam masa inkubasi, I menyatakan individu terinfeksi dengan gejala klinis. A menyatakan individu terinfeksi tanpa gejala klinis, dan R menyatakan individu yang telah sembuh dari penyakit. Selain itu, perumusan model didasarkan pada beberapa asumsi berikut:

1. Total populasi manusia adalah sebanyak  $N$  serta laju kelahiran dan kematian alami adalah konstan.
2. Kematian yang diakibatkan COVID-19 hanya berlaku pada populasi I.
3. Individu pada kelas populasi vaksin merupakan individu yang memiliki kekebalan tubuh terhadap COVID-19, di mana kekebalan tubuh tersebut didapatkan dari proses vaksinasi.

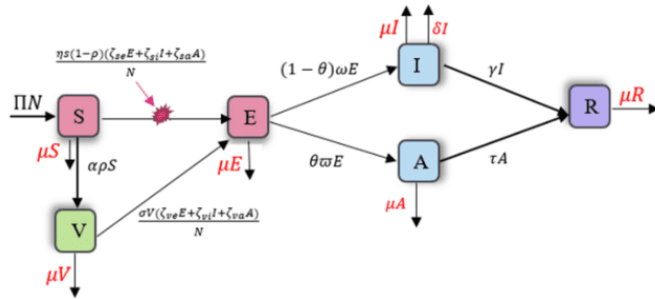
4. Penularan COVID-19 terjadi karena adanya kontak antara individu pada kelas populasi E, I, atau A dengan individu pada kelas populasi S.
5. Kelompok individu pada kelas populasi V akan terpapar apabila melakukan kontak dengan individu pada kelas populasi E, I, atau A dan terjadi penurunan tingkat kekebalan tubuh.
6. Individu pada kelas populasi I maupun individu pada kelas populasi A memiliki peluang untuk sembuh dari COVID-19. Sedangkan Individu pada kelas populasi R memiliki kekebalan tubuh terhadap COVID-19 dan tidak akan kembali rentan.

Adapun parameter model dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 : Parameter Model

Parameter	Keterangan
$\Pi$	Laju kelahiran
$\mu$	Laju kematian alami
$\eta$	Peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan
$\zeta_{se}$	Laju kontak antara individu populasi S dengan individu populasi E
$\zeta_{si}$	Laju kontak antara individu populasi S dengan individu populasi I
$\zeta_{sa}$	Laju kontak antara individu populasi S dengan individu populasi A
$\zeta_{ve}$	Laju kontak antara individu populasi V dengan individu populasi E
$\zeta_{vi}$	Laju kontak antara individu populasi V dengan individu populasi I
$\zeta_{va}$	Laju kontak antara individu populasi V dengan individu populasi A
$\theta$	Proporsi individu terinfeksi tanpa gejala.
$\omega$	Laju inkubasi untuk individu terinfeksi disertai gejala klinis
$\varpi$	Laju inkubasi untuk individu terinfeksi tanpa gejala klinis
$\tau$	Laju kesembuhan individu terinfeksi tanpa gejala klinis
$\gamma$	Laju kesembuhan individu terinfeksi disertai gejala klinis
$\delta$	Laju kematian akibat COVID-19
$\alpha$	Laju vaksinasi.
$\rho$	Proporsi individu rentan yang diberikan vaksin
$\sigma$	Peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu yang telah diberi vaksin

Berdasarkan uraian diatas, dibentuk suatu diagram kompartemen model matematika penyebaran COVID-19 tipe SVEIAR yang dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1 : Diagram Kompartemen Model Matematika Penyebaran COVID-19.

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 1 diperoleh sistem persamaan diferensial tak linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \frac{\Pi N - \eta S(1-\rho)(\zeta_{se}E + \zeta_{si}I + \zeta_{sa}A)}{N} - (\mu + \alpha\rho)S \\
 \frac{dV}{dt} &= \alpha\rho S - \left( \mu + \frac{\sigma(\zeta_{ve}E + \zeta_{vi}I + \zeta_{va}A)}{N} \right) V \\
 \frac{dE}{dt} &= \frac{\eta S(1-\rho)(\zeta_{se}E + \zeta_{si}I + \zeta_{sa}A)}{N} + \frac{\sigma(\zeta_{ve}E + \zeta_{vi}I + \zeta_{va}A)}{N} - (\mu + \omega - \theta\omega + \theta\omega) E \\
 \frac{dI}{dt} &= (1 - \theta)\omega E - (\mu + \gamma + \delta) I \\
 \frac{dA}{dt} &= \theta\omega E - (\mu + \tau) A \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \tau A - \mu R.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Selanjutnya dilakukan penskalaan model dengan mendefinisikan variabel baru  $s = \frac{S}{N}$ ,  $v = \frac{V}{N}$ ,  $e = \frac{E}{N}$ ,  $i = \frac{I}{N}$ ,  $a = \frac{A}{N}$ , dan  $r = \frac{R}{N}$ . Dari sistem persamaan (1) diperoleh sistem persamaan baru yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \Pi - \eta s(1-\rho)(\zeta_{se}e + \zeta_{si}i + \zeta_{sa}a) - (\mu + \alpha\rho)s \\
 \frac{dv}{dt} &= \alpha\rho s - \left( \mu + \sigma(\zeta_{ve}e + \zeta_{vi}i + \zeta_{va}a) \right) v \\
 \frac{de}{dt} &= \eta s(1-\rho)(\zeta_{se}e + \zeta_{si}i + \zeta_{sa}a) + \sigma(\zeta_{ve}e + \zeta_{vi}i + \zeta_{va}a) - (\mu + \omega - \theta\omega + \theta\omega) e \\
 \frac{di}{dt} &= (1 - \theta)\omega e - (\mu + \gamma + \delta) i \\
 \frac{da}{dt} &= \theta\omega e - (\mu + \tau) a \\
 \frac{dr}{dt} &= \gamma i + \tau a - \mu r.
 \end{aligned} \tag{2}$$

### 3.2. Analisis Model

Sistem persamaan (2) memiliki dua titik tetap, yaitu titik tetap bebas penyakit  $E_0 = (s, v, e, i, a, r) = (\frac{\Pi}{\mu + \alpha\rho}, \frac{\alpha\Pi\rho}{\mu^2 + \alpha\mu\rho}, 0, 0, 0, 0)$  dan titik tetap endemik  $E_1 = (s_1, v_1, e_1, i_1, a_1, r_1)$ , dimana:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{\Pi}{-\alpha\zeta_{sa}\eta - e\zeta_{se}\eta - i\zeta_{si}\eta - \mu - \alpha\rho + \alpha\zeta_{sa}\eta\rho + e\zeta_{se}\eta\rho + i\zeta_{si}\eta\rho} \\
 v_1 &= \frac{\mu + \alpha\zeta_{va}\sigma + e\zeta_{ve}\sigma + i\zeta_{vi}\sigma}{\alpha s \zeta_{sa}\eta + \zeta_{sa}\eta\rho - \zeta_{si}\eta\rho + \alpha v \zeta_{va}\sigma + i v \zeta_{vi}\sigma} \\
 e_1 &= \frac{-s\zeta_{se}\eta + \mu + \theta\omega + s\zeta_{se}\eta\rho - v\zeta_{ve}\sigma + \omega - \theta\omega}{\gamma + \delta + \mu} \\
 i_1 &= -\frac{e(-1+\theta)\omega}{\gamma + \delta + \mu} \\
 a_1 &= \frac{e\theta\omega}{\mu + \tau} \\
 r_1 &= \frac{i\gamma + \alpha\tau}{\mu}.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, ditentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) sebagai ambang batas terjadinya wabah dengan menggunakan pendekatan the next generation matrix. Berdasarkan pendekatan tersebut diperoleh matriks  $F$  dan  $V$  yang dievaluasi pada titik tetap  $E_0$ , yaitu:

$$F = \begin{pmatrix} s\zeta_{se}\eta(1-\rho) + v\zeta_{ve}\sigma & s\zeta_{si}\eta(1-\rho) + v\zeta_{vi}\sigma & s\zeta_{sa}\eta(1-\rho) + v\zeta_{va}\sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \mu + \theta\varpi + \omega - \theta\omega & 0 & 0 \\ (-1 + \theta)\omega & \gamma + \delta + \mu & 0 \\ -\theta\varpi & 0 & \mu + \tau \end{pmatrix}.$$

Bilangan reproduksi dasar adalah nilai eigen positif terbesar dari matriks  $K = FV^{-1}$ , yaitu:

$$R_0 = \frac{\Pi(-\zeta_{se}\eta\mu(-1+\rho) + \alpha\zeta_{ve}\rho\sigma)}{\mu(\mu+\alpha\rho)(\mu+\theta(\varpi-\omega)+\omega)} + \frac{\theta\varpi\Pi(-\zeta_{sa}\eta\mu(-1+\rho) + \alpha\zeta_{va}\rho\sigma)}{\mu(\mu+\alpha\rho)(\mu+\tau)(\mu+\theta(\varpi-\omega)+\omega)} + \frac{(1-\theta)\Pi(-1+\rho) + \alpha\zeta_{ve}\rho\sigma\omega}{\mu(\gamma+\delta+\mu)(\mu+\alpha\rho)(\mu+\theta(\varpi-\omega)+\omega)},$$

atau  $R_0 = R_1 + R_2 + R_3$ , di mana:

$$R_1 = \frac{\Pi(-\zeta_{se}\eta\mu(-1+\rho) + \alpha\zeta_{ve}\rho\sigma)}{\mu(\mu+\alpha\rho)(\mu+\theta(\varpi-\omega)+\omega)},$$

$$R_2 = \frac{\theta\varpi\Pi(-\zeta_{sa}\eta\mu(-1+\rho) + \alpha\zeta_{va}\rho\sigma)}{\mu(\mu+\alpha\rho)(\mu+\tau)(\mu+\theta(\varpi-\omega)+\omega)},$$

$$R_3 = \frac{(1-\theta)\Pi(-1+\rho) + \alpha\zeta_{ve}\rho\sigma\omega}{\mu(\gamma+\delta+\mu)(\mu+\alpha\rho)(\mu+\theta(\varpi-\omega)+\omega)}.$$

**Teorema 1.** Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan  $\bar{\omega} > \omega$ .

**Bukti.** Untuk memperoleh kestabilan sistem dititik  $E_0$  terlebih dahulu dilakukan penilearan disekitar titik kesetimbangan  $E_0$  sehingga diperoleh matriks jacob  $J_0$  sebagai berikut:

$$J_0 = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & J_{13} & J_{14} & J_{15} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} & J_{34} & J_{35} & 0 \\ 0 & 0 & J_{43} & J_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{53} & 0 & J_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix}.$$

di mana:

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\mu - \alpha\rho & J_{34} &= \frac{\zeta_{si}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu+\alpha\rho} + \alpha \frac{a\zeta_{vi}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu^2+\alpha\rho} \\ J_{13} &= -\frac{\zeta_{se}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu+\alpha\rho} & J_{35} &= \frac{\zeta_{sa}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu+\alpha\rho} + \alpha \frac{a\zeta_{va}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu^2+\alpha\rho} \\ J_{14} &= -\frac{\zeta_{si}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu+\alpha\rho} & J_{43} &= (1-\theta)\omega \\ J_{15} &= -\frac{\zeta_{sa}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu+\alpha\rho} & J_{44} &= -\gamma - \delta - \mu \\ J_{21} &= \alpha\rho & J_{53} &= \theta\varpi \\ J_{22} &= -\mu & J_{55} &= -\mu - \tau, \\ J_{23} &= -\frac{a\zeta_{ve}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu^2+\alpha\rho} & J_{64} &= \gamma \\ J_{24} &= -\frac{a\zeta_{vi}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu^2+\alpha\rho} & J_{65} &= \eta \\ J_{25} &= -\frac{a\zeta_{va}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu^2+\alpha\rho} & J_{66} &= -\mu \\ J_{33} &= -\mu - \theta\varpi + \frac{\zeta_{se}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu+\alpha\rho} + \alpha \frac{a\zeta_{ve}\eta\Pi(1-\rho)}{\mu^2+\alpha\rho} - \omega + \theta\varpi. \end{aligned}$$

Nilai eigen dari matriks  $J_0$  ditentukan berdasarkan persamaan karakteristik  $\det(\lambda I - J_0) = 0$ .

atau

$$(J_{11} - \lambda)(-J_{22} + \lambda)(-J_{66} + \lambda)(J_{35}J_{53}(J_{44} - \lambda) + (J_{55} - \lambda)(J_{34}J_{43} + (J_{33} - \lambda)(-J_{44} + \lambda))) = 0. \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (3) terdapat enam nilai eigen dari matriks  $J_0$ , dengan tiga diantaranya adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu - \alpha\rho, \quad \lambda_2 = -\mu,$$

$$\lambda_3 = -\mu.$$

Sedangkan tiga nilai eigen lainnya dapat ditemukan pada persamaan berikut:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (4)$$

di mana:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = (1 - R_1)(\mu + \theta(\varpi - \omega) + \omega) + (\gamma + \delta + \mu) + (\mu + \tau),$$

$$a_2 = (\mu + \theta(\varpi - \omega) + \omega)((1 - R_1 - R_2)(\mu + \tau) + (1 - R_1 - R_3)(\gamma + \delta + \mu)) + (\gamma + \delta + \mu)(\mu + \tau),$$

$$a_3 = (1 - R_0)(\mu + \theta(\varpi - \omega) + \omega)(\gamma + \delta + \mu)(\mu + \tau).$$

Kondisi  $R_0 < 1$  dan  $\varpi > \omega$  mengakibatkan  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , dan  $a_1a_2 > a_3$ . Berdasarkan kriteria routh hurwitz (Fisher, 1999) dapat disimpulkan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal.

**Teorema 2.** Titik kesetimbangan endemik  $E^*$  bersifat stabil asimtotik local jika  $R_0 > 1$ .

**Bukti.** Misalkan  $\varphi = \zeta_{se}$  adalah parameter bifurkasi. Misalkan juga  $x_1 = s$ ,  $x_2 = v$ ,  $x_3 = e$ ,  $x_4 =$

$i$ ,  $x_5 = a$ , dan  $x_6 = r$ . Akibatnya sistem persamaan (2) berubah menjadi:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \Pi - \eta x_1(1 - \rho)(\zeta_{se}x_3 + \zeta_{si}x_4 + \zeta_{sa}x_5) - (\mu + \alpha\rho)x_1$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \alpha\rho x_1 - (\mu + \sigma(\zeta_{ve}x_3 + \zeta_{vi}x_4 + \zeta_{va}x_5))x_2$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \eta x_1(1 - \rho)(\zeta_{se}x_3 + \zeta_{si}x_4 + \zeta_{sa}x_5) + \sigma x_2(\zeta_{ve}x_3 + \zeta_{vi}x_4 + \zeta_{va}x_5) - (\mu + \omega + \theta(\varpi - \omega))x_3$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1 - \theta)\omega x_3 - (\mu + \gamma + \delta)x_4$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \theta\omega x_3 - (\mu + \tau)x_5$$

$$f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \gamma x_4 + \tau x_5 - \mu x_6$$

Kondisi  $R_0 = 1$  bersesuaian dengan

$$\varphi = \varphi^* = \frac{(\theta(\gamma + \delta + \mu)\varpi\Pi(-\zeta_{sa}\eta\mu(-1 + \rho) + \alpha\zeta_{va}\rho\sigma))}{(\eta\mu(\gamma + \delta + \mu)\Pi(-1 + \rho)(\mu + \tau))} + \frac{\alpha\zeta_{ve}(\gamma + \delta + \mu)\Pi\rho\sigma(\mu + \tau) + (1 - \theta)\Pi(-\zeta_{si}\eta\mu(-1 + \rho))}{(\eta\mu(\gamma + \delta + \mu)\Pi(-1 + \rho)(\mu + \tau))} + \frac{\alpha\lambda_{vi}\rho\sigma(\mu + \tau)\omega - \mu(\gamma + \delta + \mu)(\mu + \alpha\rho)(\mu + \tau)(\mu + \theta(\varpi - \omega) + \omega))}{(\eta\mu(\gamma + \delta + \mu)\Pi(-1 + \rho)(\mu + \tau))}$$

Pada kondisi  $R_0 = 1$ , titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  memiliki lima nilai eigen negatif dan satu nilai eigen nol. Nilai eigen nol tersebut memiliki vektor eigen kanan  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$  dan vektor eigen kiri  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$  sebagai berikut.

Misal  $u_5 > 0$  bebas, maka

$$u_1 = -\frac{\eta\Pi(1 - \rho)((\gamma + \delta + \mu)(\zeta_{sa}\theta\varpi + \zeta_{se}(\mu + \tau)) + \zeta_{si}(1 - \theta)(\mu + \tau)\omega)}{\theta(\gamma + \delta + \mu)\varpi(\mu + \alpha\rho)^2} u_5 < 0,$$

$$u_2 = -\alpha\Pi\rho \left( \frac{\zeta_{sa}\eta(1 - \rho)}{\mu(\mu + \alpha\rho)^2} + \frac{\zeta_{va}\sigma}{\mu^3 + \alpha\mu^2\rho} + \frac{(\mu + \tau)((\gamma + \delta + \mu)(\zeta_{se}\eta\mu(1 - \rho) + \zeta_{ve}(\mu + \alpha\rho)\sigma) + (1 - \theta)(\zeta_{si}\eta\mu(1 - \rho) + \zeta_{vi}(\mu + \alpha\rho)\sigma)\omega)}{\theta\mu^2(\gamma + \delta + \mu)\varpi(\mu + \alpha\rho)^2} \right) u_5 < 0,$$

$$u_3 = \frac{(\mu + \tau)}{\theta\varpi} u_5 > 0, \quad u_4 = \frac{(1 - \theta)(\mu + \tau)\omega}{\theta(\gamma + \delta + \mu)\varpi} u_5 > 0, \quad u_6 = \left( \frac{\tau}{\mu} + \frac{\gamma(1 - \theta)(\mu + \tau)\omega}{\mu\theta(\gamma + \delta + \mu)\varpi} \right) u_5 > 0.$$

Misal  $v_3 > 0$  bebas, maka

$$v_1 = v_2 = v_6 = 0, \quad v_4 = \frac{\Pi(\zeta_{si}\eta\mu(1 - \rho) + \alpha\zeta_{vi}\rho\sigma)}{\mu(\gamma + \delta + \mu)(\mu + \alpha\rho)} v_3 > 0, \quad v_5 = \frac{\Pi(\zeta_{sa}\eta\mu(1 - \rho) + \alpha\zeta_{va}\rho\sigma)}{\mu(\mu + \alpha\rho)(\mu + \tau)} v_3 < 0,$$

Menggunakan teorema pada (Castillo-chavez and Song, 2004) didefinisikan

$$a = \sum_{k,i,j=1}^6 u_k u_i u_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} (T^0, \varphi^*) \quad (5)$$

$$b = \sum_{k,i,j=1}^6 u_k u_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \varphi} (T^0, \varphi^*) \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (5) dan (6) diperoleh bahwa

$$a = -\frac{\Pi\zeta_{sa}\eta^2\theta\mu^2(\gamma+\delta+\mu)\varpi(-1+\rho)^2\hat{A}}{\theta^2\mu^2(\gamma+\delta+\mu)^2\varpi^2(\mu+\alpha\rho)^2}u_5^2v_3 - \frac{\Pi\varphi^*\eta^2\mu^2(\gamma+\delta+\mu)(-1+\rho)^2(\mu+\tau)\hat{A}}{\theta^2\mu^2(\gamma+\delta+\mu)^2\varpi^2(\mu+\alpha\rho)^2}u_5^2v_3$$

$$- \frac{\Pi\zeta_{si}\eta^2(1-\theta)\mu^2(-1+\rho)^2(\mu+\tau)\omega\hat{A}}{\theta^2\mu^2(\gamma+\delta+\mu)^2\varpi^2(\mu+\alpha\rho)^2}u_5^2v_3 - \frac{\Pi\alpha\zeta_{va}\theta(\gamma+\delta+\mu)\varpi\rho\sigma(\hat{E}+(\mu+\tau)((\gamma+\delta+\mu)\check{C}+(1-\theta)\hat{I}))}{\theta^2\mu^2(\gamma+\delta+\mu)^2\varpi^2(\mu+\alpha\rho)^2}u_5^2v_3$$

$$- \frac{\Pi\alpha\zeta_{ve}(\gamma+\delta+\mu)\rho\sigma(\mu+\tau)(\hat{E}+(\mu+\tau)((\gamma+\delta+\mu)\check{C}+(1-\theta)\hat{I}))}{\theta^2\mu^2(\gamma+\delta+\mu)^2\varpi^2(\mu+\alpha\rho)^2}u_5^2v_3$$

$$- \frac{\Pi\alpha\zeta_{vi}(1-\theta)\rho\sigma(\mu+\tau)\omega(\hat{E}+(\mu+\tau)((\gamma+\delta+\mu)\check{C}+(1-\theta)\hat{I}))}{\theta^2\mu^2(\gamma+\delta+\mu)^2\varpi^2(\mu+\alpha\rho)^2}u_5^2v_3 < 0$$

$$b = \frac{\eta\Pi(1-\rho)(\mu+\tau)}{\theta\varpi(\mu+\alpha\rho)}u_5v_3 > 0$$

di mana:

$$\hat{A} = (\gamma + \delta + \mu)(\zeta_{sa}\theta\varpi + \varphi^*(\mu + \tau)) + \zeta_{si}(1 - \theta)(\mu + \tau)\omega$$

$$\check{C} = (\varphi^*\eta\mu(1 - \rho) + \zeta_{ve}(\mu + \alpha\rho)\sigma)$$

$$\hat{E} = \zeta_{sa}\eta\theta\mu(\gamma + \delta + \mu)\varpi(1 - \rho) + \zeta_{va}\theta(\gamma + \delta + \mu)\varpi(\mu + \alpha\rho)\sigma$$

$$\hat{I} = (\zeta_{si}\eta\mu(1 - \rho) + \zeta_{vi}(\mu + \alpha\rho)\sigma)\omega.$$

Nilai a dan b diatas memenuhi kasus 4 pada (Castillo-chavez and Song, 2004). Hal ini menunjukan ketika  $\varphi$  berubah dari  $\varphi < \varphi^*$  menjadi  $\varphi > \varphi^*$  atau  $R_0 < 1$  menjadi  $R_0 > 1$  akan mengakibatkan perubahan pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  dari stabil menjadi tidak stabil. Selain itu, terjadi perubahan pada titik kesetimbangan endemik  $E_*$  dari negatif menjadi positif dan stabil asimtotik lokal.

### 3.3. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk memeperkuat hasil analisis sifat kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan menggunakan nilai parameter pada Tabel 2. Hasil perhitungan merupakan solusi atau penyelesaian dari sistem persamaan (2). Simulasi numerik akan memberikan ilustrasi kapan wabah penyakit akan meningkat atau menghilang dari system. Selain itu, simulasi numerik dilakukan untuk mempelajari dinamika populasi manusia pada sistem ketika terjadi penyebaran COVID-19 dengan memvariasikan beberapa nilai parameter. Nilai awal variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah  $s(0) = 0,7844$ ,  $v(0) = 0,3399$ ,  $e(0) = 0,00918$ ,  $i(0) = 0,01365$ ,  $a(0) = 0,007347$ , dan  $r(0) = 0,0005294$ .

Tabel 2 : Parameter Model

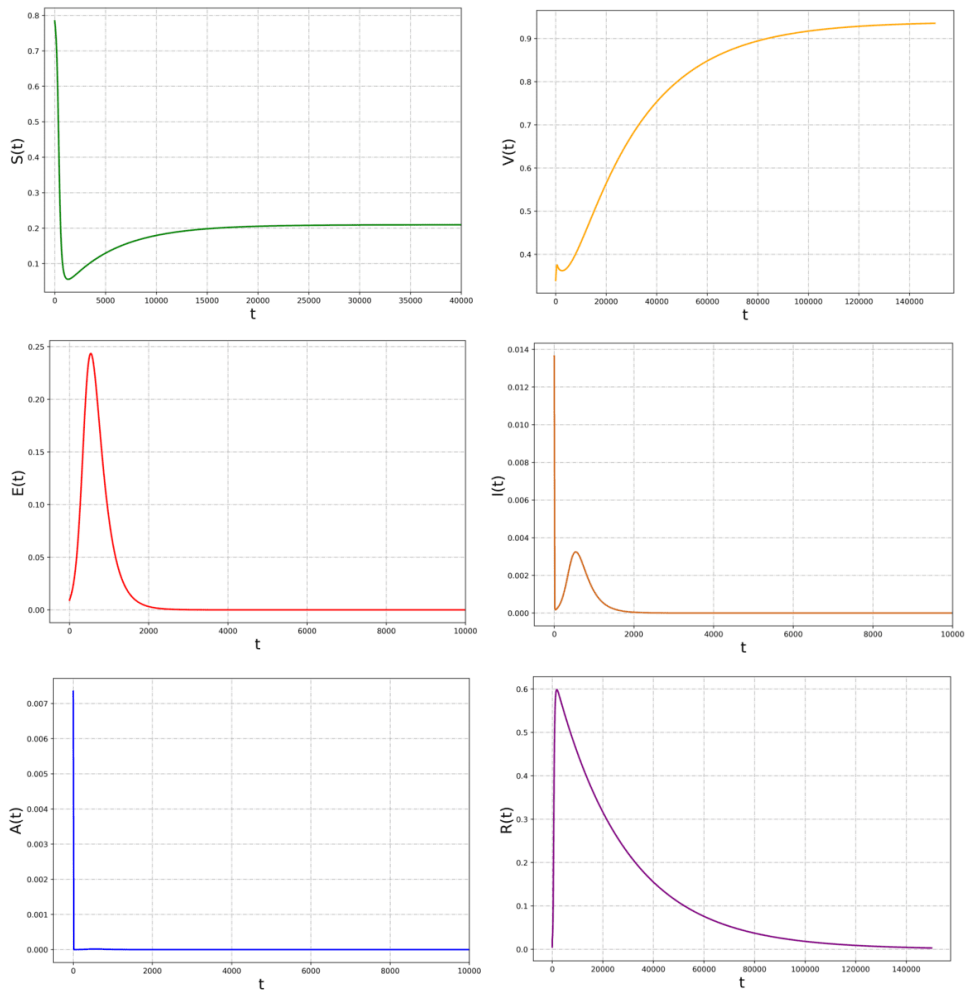
Parameter	$R_0 < 1$	Sumber	$R_0 > 1$	Sumber
$\Pi$	0,000041	Rinaldi (2021)	0,000041	Rinaldi (2021)
$\mu$	0,0000357	Resmawan (2021)	0,0000357	Resmawan (2021)
$\eta$	0,2	Resmawan (2021)	0,2	Resmawan (2021)
$\zeta_{se}$	0,09	Resmawan (2021)	0,09	Resmawan (2021)
$\zeta_{si}$	0,05	Resmawan (2021)	0,05	Resmawan (2021)
$\zeta_{sa}$	0,07	Resmawan (2021)	0,07	Resmawan (2021)
$\zeta_{ve}$	0,03	Asumsi	0,03	Asumsi
$\zeta_{vi}$	0,02	Asumsi	0,02	Asumsi



$\zeta_{va}$	0,01	Asumsi	0,01	Asumsi
$\theta$	0,12	Resmawan (2021)	0,12	Resmawan (2021)
$\omega$	0,005	Resmawan (2021)	0,005	Resmawan (2021)
$\varpi$	0,00048	Resmawan (2021)	0,00048	Resmawan (2021)
$\tau$	0,854302	Resmawan (2021)	0,01	Asumsi
$\gamma$	0,27	Asumsi	0,27	Asumsi
$\delta$	0,06	Asumsi	0,06	Asumsi
$\alpha$	0,08	Asumsi	0,002	Asumsi
$\rho$	0,002	Asumsi	0,03	Asumsi
$\sigma$	0,01	Asumsi	0,01	Asumsi

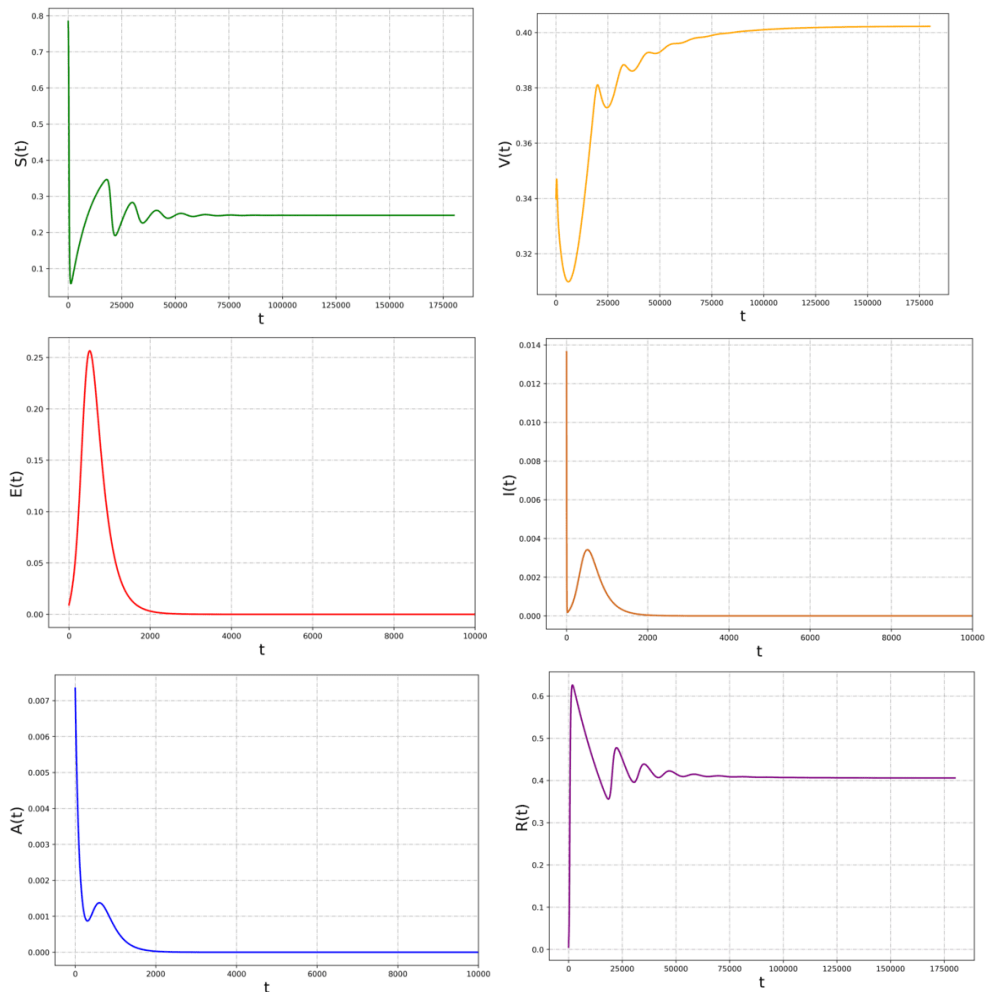
### 3.4. Dinamika Populasi

Pada tahap ini dilakukan penyelesaian numerik dengan memberikan nilai awal pada setiap variabel model dan parameter model sesuai dengan Tabel 2. Terdapat dua kondisi yang diamati, yaitu kondisi  $R_0 < 1$  dan  $R_0 > 1$ . Hal ini dilakukan untuk melihat kesesuaian pergerakan dinamika populasi manusia berdasarkan solusi numerik dengan teorema pada sifat kestabilan titik kesetimbangan.



Gambar 2 : Dinamika Populasi Manusia untuk Kondisi  $R_0 < 1$ .

Dinamika populasi manusia pada Gambar 2 menunjukkan bahwa jumlah individu masing-masing kelas populasi menuju atau stabil di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan terhadap COVID-19 mengalami penurunan dari nilai awal hingga mencapai kondisi stabil dititik  $s = 0,2095$  atau sekitar 57.822.000 orang. Sedangkan jumlah individu yang divaksin mengalami peningkatan dari nilai awal hingga mencapai kondisi stabil dititik  $v = 0,9389$  atau sekitar 259.136.400 orang. Sedangkan jumlah individu yang terpapar dan individu terinfeksi gejala klinis maupun terinfeksi tanpa gejala klinis mengalami penurunan nilai awal hingga mencapai kondisi stabil di sekitar titik  $e = 0$ ,  $i = 0$ ,  $a = 0$ . Adapun jumlah individu yang sembuh mengalami peningkatan dari nilai awal, kemudian mengalami penurunan dan stabil di sekitar titik  $r = 0$ . Hal ini dikarenakan tidak ada lagi individu yang terinfeksi COVID-19.



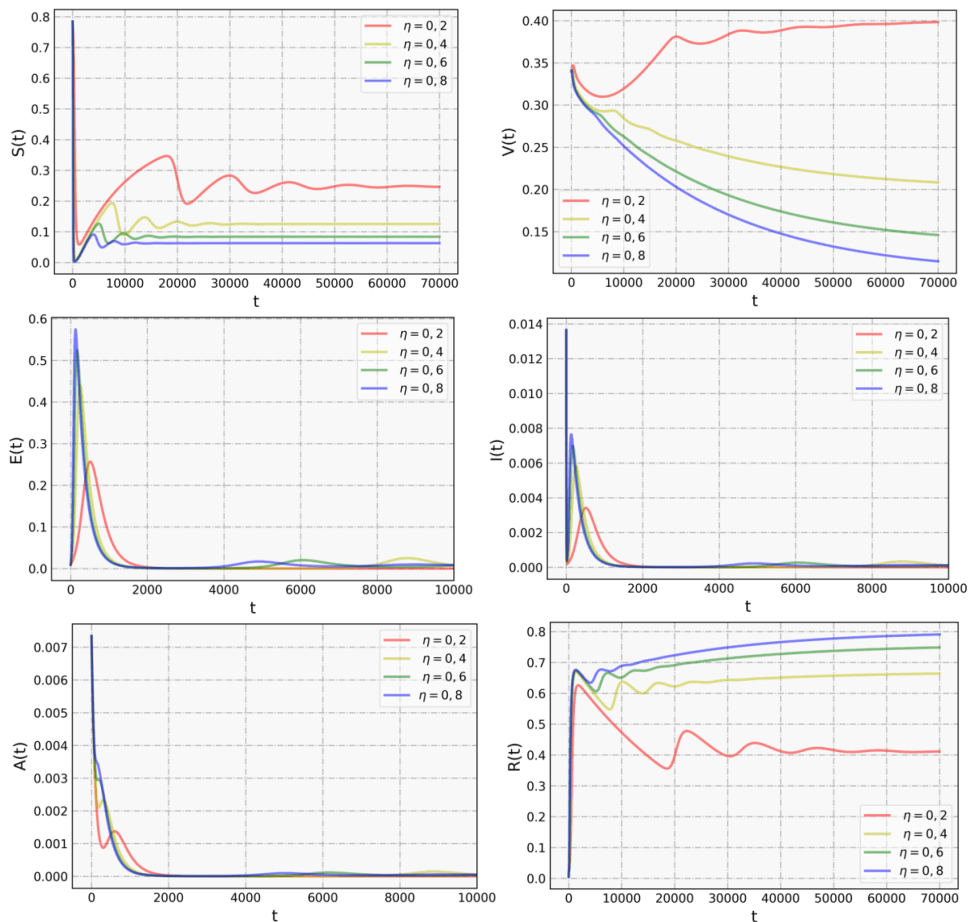
Gambar 3 : Dinamika Populasi Manusia untuk Kondisi  $R_0 > 1$ .

Dinamika populasi pada Gambar 3 menunjukkan bahwa jumlah individu pada masing-masing kelas populasi menuju atau stabil di sekitar titik kesetimbangan endemik. Jumlah individu yang rentan terhadap COVID-19 mengalami penurunan dari nilai awal serta mengalami fluktuasi hingga mencapai kondisi stabil pada  $s = 0,2474$  atau sekitar 68.282.000 orang. Adapun jumlah individu yang divaksin mengalami penurunan diawal waktu dan seiring berjalannya waktu mengalami fluktuasi hingga stabil pada titik  $v = 0,4022$  atau sekitar 111.007.200 orang. Sedangkan jumlah individu yang terpapar mengalami penurunan dari nilai awal hingga mencapai kondisi stabil pada  $e = 0,0039$  atau sekitar 1.076.400 orang. Selain itu, jumlah individu yang terinfeksi gejala klinis juga mengalami penurunan dari nilai awal hingga mencapai kondisi stabil pada  $i = 0,00005282$  atau sekitar 14.578, orang. Begitu juga dengan jumlah individu yang terinfeksi tanpa gejala klinis mengalami penurunan dari nilai awal hingga mencapai kondisi stabil pada  $a = 0,00002274$  atau sekitar 62.7624 orang. Terakhir, jumlah

individu yang sembuh dari COVID-19 mengalami peningkatan dari nilai awal serta mengalami fluktuasi hingga stabil pada titik  $r = 0,4059$  atau sekitar 112.028.400 orang.

### 3.5. Dinamika Populasi Terhadap Perubahan Nilai Parameter

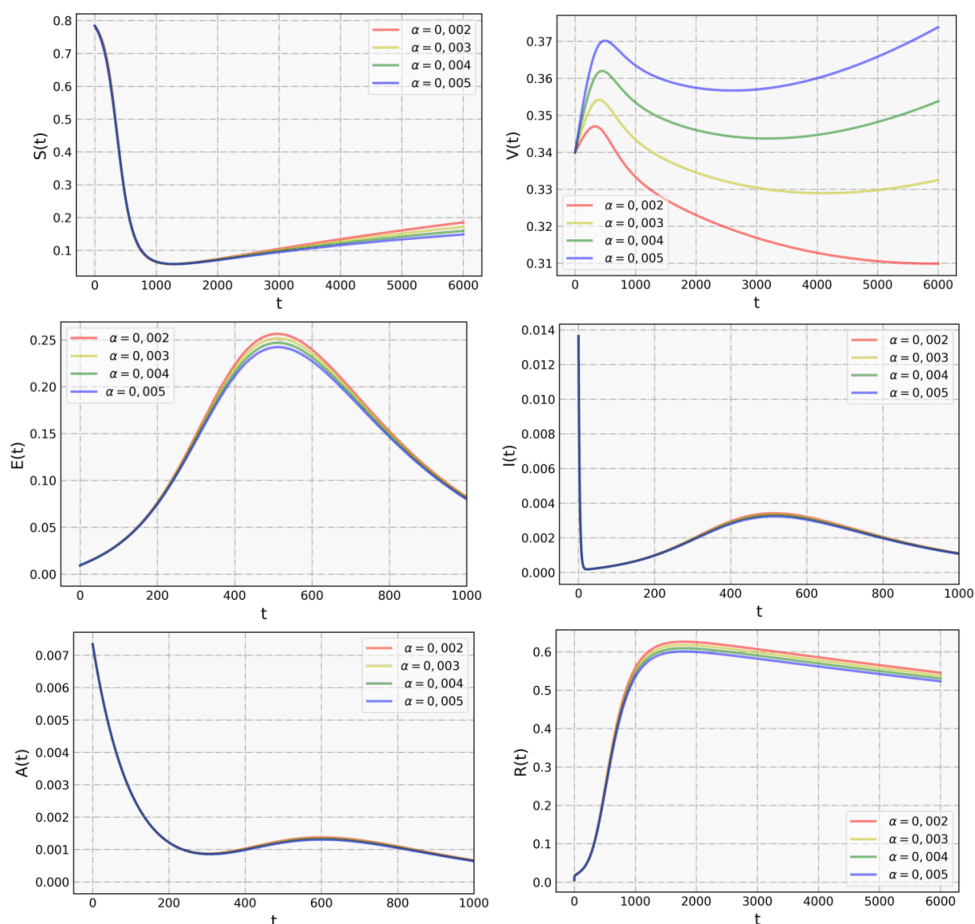
Perhitungan selanjutnya adalah melakukan perubahan nilai parameter untuk melihat pengaruhnya terhadap dinamika populasi manusia. Adapun parameter yang digunakan adalah parameter  $\eta$  menyatakan peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi dan parameter  $\alpha$  menyatakan proporsi individu rentan yang diberikan vaksin terhadap penyebaran COVID-19 pada dinamika populasi.



Gambar 4 : Pengaruh Parameter  $\eta$  terhadap Dinamika Populasi Manusia.

Pada Gambar 4, perubahan dari nilai peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi memberikan pengaruh yang besar terhadap perubahan jumlah individu rentan, jumlah individu yang divaksin dan jumlah individu sembuh. Jika peluang infeksi setelah kontak antara individu terinfeksi dengan individu rentan tanpa vaksinasi diperbesar dan parameter lain dibuat konstan, maka hal ini akan menyebabkan

semakin berkurangnya jumlah individu rentan dan individu yang divaksin. Sedangkan jumlah individu yang sembuh dari COVID-19 mengalami peningkatan akibat dari perubahan nilai parameter tersebut. Selain itu, peningkatan nilai parameter  $\eta$  dapat mepercepat terjadinya peningkatan pada jumlah individu yang terpapar, terinfeksi dengan gejala, dan terinfeksi tanpa gejala.



Gambar 5 : Pengaruh Parameter  $\alpha$  terhadap Dinamika Populasi Manusia.

Berdasarkan Gambar 5 dapat dilihat bahwa peningkatan laju vaksinasi dapat mengurangi jumlah individu rentan dan meningkatkan jumlah individu yang divaksin. Peningkatan laju vaksinasi juga dapat meperlambat terjadinya penularan COVID-19, hal ini terlihat dari penurunan jumlah individu yang terpapar akibat penambahan nilai parameter  $\alpha$ . Hal ini mengakibatkan jumlah individu yang sembuh menjadi berkurang. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa peningkatan laju vaksinai adalah cara yang bisa dilakukan untuk mengurangi penyebaran penyakit COVID-19.

#### IV. KESIMPULAN

Model matematika penyebaran COVID-19 tipe SVEIAR memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  dan titik kesetimbangan endemik  $E^*$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik loka jika  $R_0 < 1$ . Sedangkan titik kesetimbangan endemik  $E^*$  bersifat stabil jika  $R_0 > 1$ . Pemberian vaksin dapat memperlambat dan mengurangi resiko terjadinya penyebaran COVID-19.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Abioye, A.I. *et al.* (2021) 'Mathematical model of COVID-19 in Nigeria with optimal control', *Results in Physics*, 28(July), p. 104598. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104598>.
- [2]. Alenezi, M.N., Al-Anzi, F.S. and Alabdulrazzaq, H. (2021) 'Building a sensible SIR estimation model for COVID-19 outspread in Kuwait', *Alexandria Engineering Journal*, 60(3), pp. 3161–3175. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.01.025>.
- [3]. Annas, S. *et al.* (2020) 'Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia', *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, p. 110072. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110072>.
- [4]. Castillo-chavez, C. and Song, B. (2004) 'Dynamical Models Of Tuberculosis and Their Applications', *Mathematical Biosciences and Engineering*, 1(2), pp. 361–404.
- [5]. Fisher, S.D. (1999) *Complex Variables*. 2nd edn. New York: Dover Publications, INC.
- [6]. Kementerian Kesehatan Republik Indonesia (2020) *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Coronavirus Disease 2019 (COVID-19)*. Available at: <https://covid19.kemkes.go.id/protokol-covid-19/kmk-no-hk-01-07-menkes-413-2020-ttg-pedoman-pencegahan-dan-pengendalian-covid-19>.
- [7]. Kementerian Komunikasasi dan Informatika RI (2021) *Pasien Sembuh Covid-19 Semakin Meningkat*.
- [8]. Kifle, Z.S. and Obsu, L.L. (2022) 'Mathematical modeling for COVID-19 transmission dynamics: A case study in Ethiopia', *Results in Physics*, 34, p. 105191. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105191>.
- [9]. Lounis, M. and Bagal, D.K. (2020) 'Estimation of SIR model's parameters of COVID-19 in Algeria', *Bulletin of the National Research Centre*, 44(1), p. 180. Available at: <https://doi.org/10.1186/s42269-020-00434-5>.
- [10]. Nuha, A.R., Achmad, N. and Supu, N. 'Ain (2021) 'Analisis Model Matematika Penyebaran Covid-19 Dengan Intervensi Vaksinasi Dan Pengobatan', *Jurnal Matematika UNAND*, 10(3), p. 406. Available at: <https://doi.org/10.25077/jmu.10.3.406-422.2021>.

- [11]. Resmawan, R., Nuha, A.R. and Yahya, L. (2021) 'Analisis Dinamik Model Transmisi COVID-19 dengan Melibatkan Intervensi Karantina', *Jambura Journal of Mathematics*, 3(1), pp. 66–79. Available at: <https://doi.org/10.34312/jjom.v3i1.8699>.
- [12]. Seddighi Chaharborj, Shahriar *et al.* (2021) 'Controlling of pandemic COVID-19 using optimal control theory', *Results in Physics*, 26(May), p. 104311. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104311>.
- [13]. Susilo, A. *et al.* (2020) 'Coronavirus Disease 2019: Tinjauan Literatur Terkini', *Jurnal Penyakit Dalam Indonesia* /, 7(1), pp. 45–67.