Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 20 Nomor 2 Desember 2023 (Halaman 222 - 234)
doi: https://doi.org/10.22487/2540766X.2023.v20.i2.16354

JIMT
Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
ISSN : 2540 – 766X

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL MENGGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA ORDE KEENAM DENGAN ALGORITMA PARALEL

Iman Al Fajri[1], Hendra[2], Jeffry Kusuma[3], Selvy Musdalifah[4], Nasria Nacong[5], Hartayuni Sain[6], dan Armayani Arsal[7]

[1,]Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tadulako
[2,]Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
[1]iman.alfajri@gmail.com, [2]hendra.unhas@gmail.com, [3]jeffry.kusuma@gmail.com, [4]selvymusdalifah@gmail.com, [5]nasrianacong@gmail.com, [6]hartayunisain@gmail.com, [7]armayaniarsal@ung.ac.id

ABSTRACT
Research on parallelization continues to experience developments at this time, including in numerical calculations. This paper will describe the solution of differential equations using the sixth order Runge-Kutta method with a parallel algorithm. This paper presents a derivation of the sixth order Runge-Kutta method which is suitable for parallel implementation. Development of a parallel model based on the sparsity structure. The results of calculations with the parallel model will then be compared with the sequential model in terms of accuracy and execution time. The numeric calculation results show that the parallel method means an analytic solution, the accuracy is better. In terms of execution time, the parallel method also has an advantage over the sequential method, which is faster.
Keywords : Sixth Order Runge-Kutta Method, Parallel Algorithm, Sequential Algorithm;

ABSTRAK
Penelitian tentang paralelisasi terus mengalami perkembangan saat ini, termasuk dalam perhitungan numerik. Pada tulisan ini akan dibahas penyelesaian persamaan diferensial menggunakan metode Runge-Kutta orde keenam dengan algoritma paralel. Makalah ini menyajikan penurunan dari metode Runge-Kutta orde keenam yang cocok untuk implementasi secara paralel. Pengembangan model paralel didasarkan pada struktur ketersebaran. Hasil perhitungan dengan model paralel kemudian akan dibandingkan dengan model sekuensial dari sisi akurasi dan waktu eksekusi. Pehitungan numerik menunjukkan bahwa metode paralel lebih mendekati solusi analitik, artinya akurasinya lebih baik. Ditinjau dari sisi waktu eksekusi, metode paralel juga memiliki keunggulan dibandingakan dengan metode sekuensial, yaitu lebih cepat.
Kata kunci : Metode Runge-Kutta Orde Keenam, Algoritma Paralel, Algoritma Sekuensial.

I. PENDAHULUAN

Algoritma paralel adalah algoritma untuk menyelesaikan masalah numerik. Masalah numerik merupakan salah satu masalah yang memerlukan kecepatan komputasi yang sangat tinggi. Dalam ilmu komputer, sebuah algoritma paralel atau algoritma bersamaan, sebagai lawan sekuensial, merupakan algoritma yang dapat dieksekusi sepotong pada suatu waktu dan pada banyak perangkat pengolahan yang berbeda, kemudian digabungkan bersama-sama lagi sehingga didapatkan hasil yang benar. [1]

Ada tingkatan paralelisme yang bisa digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial biasa secara numerik. Caranya adalah dengan restrukturisasi kode manual dan/atau kompilator paralelisasi. Ini dapat ditambah dengan mengganti serial dengan paralel, misalnya, aljabar linier. Namun, level-level paralelisasi ini mungkin tidak diharapkan menghasilkan banyak perbaikan karena banyak kode mungkin masih harus berjalan secara serial. Pendekatan yang lebih bermanfaat adalah mendesain ulang sifat sekuensial dari algoritma yang digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial biasa menjadi algoritma paralel. [2]

Metode Runge-Kutta adalah salah satu metode penyelesaian persamaan diferensial dengan nilai awal secara numerik. Metode ini dapat menghasilkan solusi yang memiliki akurasi yang cukup tinggi dibandingkan dengan metode lainnya.

Metode Runge-Kutta orde keenam yang baru yang tergantung pada metode Runge-Kutta orde kelima yang baru dari [3] [4],. Sifat dari metode ini adalah bahwa dibutuhkan lima evaluasi fungsi di mana metode standar membutuhkan enam atau tujuh evaluasi fungsi. Kemudian metode ini dibandingkan dengan metode Runge Kutta orde kelima yang baru. Riset [5] menemukan penyelesaian masalah nilai awal menggunakan Runge Kutta orde keenam. Tujuan utama dari penelitian tersebut adalah untuk menunjukkan representasi baru yang paling sederhana untuk pohon dan turunan metode Runge-Kutta orde keenam dengan tujuh tahap. Perhitungan simbolis digunakan dalam penelitian ini. Dalam rangka menyederhanakan metode, di bagian akhir diberikan contoh untuk menggambarkan metode yang disajikan. Penelitian lain oleh [6] adalah tentang penyelesaian persamaan diferensial dengan Metode Runge-Kutta orde keempat paralel menggunakan dual core. Mereka membandingkan hasilnya dengan metode klasik dan hasilnya menunjukkan bahwa algoritma numerik paralel memiliki akurasi tinggi dan efisiensi komputasi dalam penggunaan dual core. Penelitian [7] menggunakan Metode Runge-Kutta orde kelima. Penelitian mereka terinspirasi dari teori bahwa komputasi paralel mengurangi waktu komputasi. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa metode algoritma paralel lebih akurat dan memberikan pengurangan waktu komputasi yang signifikan dibandingkan dengan algoritma sekuensial. Perbandingan Metode Runge-Kutta paralel dengan Runge-Kutta sekuensial dan Dorman Prince dilihat dari waktu komputasinya adalah bahwa waktu komputasi paralel sebanding dengan versi sekuensial. Hanya saja versi paralel butuh sumberdaya komputasi yang jauh lebih banyak. Kemudian mereka mengusulkan algoritma paralel yang baru. [8]

Sejak munculnya komputer digital, minat baru telah difokuskan pada metode Runge-Kutta, dan sejumlah besar peneliti telah berkontribusi pada perluasan pembahasan menjadi sebuah teori, dan mengembangkan metode tertentu. [9]

II. METODE PENELITIAN

2.1. Metode Runge Kutta Orde Keenam Paralel

Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde pertama adalah

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

Bentuk umum metode Runge-Kutta s-tahap untuk masalah di atas didefinisikan sebagai

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{2}$$

di mana

$$k_i = f\left(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j \right), \qquad i, j = 1,2, \dots., s \tag{3}$$

Dengan mengasumsikan sebagai berikut.

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\,, \qquad i, j = 1,2, \dots, s \tag{4}$$

Koefisien pada persamaan (2) dan (3) dapat ditampilkan dengan menggunakan tabel Butcher [10] sebagai berikut.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Gambar 1. Tabel Butcher

Untuk metode Runge-Kutta orde enam dengan 6-tahap dirumuskan sebagai berikut.

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{6} b_i k_i \tag{5}$$

Sedangkan solusi eksak untuk persamaan (1) adalah

$$Y_i = y\left(x_0 + h \sum_{i=1}^{6} a_{ij} \right) + O(h^2) \tag{6}$$

Koefisien pada persamaan (2) dan (2) direprentasikan dengan Array Butcher atau Tabel Butcher seperti pada Gambar 2.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
c_1 & a_{11} & & & & & \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & \\
c_5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \\
c_6 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6
\end{array}
$$

Gambar 2 : Tabel Butcher 6-tahap Orde Enam

Metode ini dikatakan eksplisit jika $a_{ij} = 0$ untuk $i \leq j$, semi implisit jika $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$, selain itu dikatakan sepenuhnya implisit. Kajian ini secara khusus membahas tentang metode Runge-Kutta dengan sifat semi implisit.

2.2. Metode Paralel Tipe II

Tabel Butcher untuk metode orde keenam tipe II diberikan oleh Gambar 3.

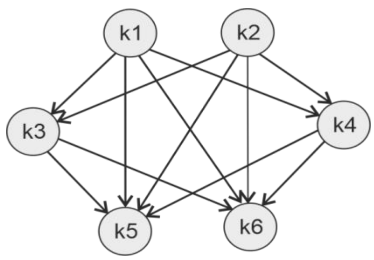
$$
\begin{array}{c|cccccc}
c_1 & a_{11} & & & & & \\
c_2 & 0 & a_{22} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} & & \\
c_5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \\
c_6 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & 0 & a_{66} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6
\end{array}
$$

Gambar 3 : Tabel Butcher 6-tahap Orde Keenam Tipe II

Struktur ketersebaran metode tipe II diperluas untuk mendapatkan metode Runge-Kutta orde tinggi yang merupakan orde keenam dengan enam evaluasi fungsional. Struktur baru disajikan pada Gambar 4 bersama dengan digrafnya.

Matriks Runge-Kutta **Digraf**

$$
\begin{pmatrix}
x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x & x & x & 0 & 0 & 0 \\
x & x & 0 & x & 0 & 0 \\
x & x & x & x & x & 0 \\
x & x & x & x & 0 & x
\end{pmatrix}
$$



Gambar 4 : Struktur Ketersebaran dan Digraf untuk Metode Runge- Kutta Orde Keenam dengan Enam Tahap

Formulasi Runge-Kutta untuk tabel Butcher 6-tahap Orde keenam Tipe II tersebut adalah

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{6} b_i k_i,$$

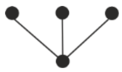
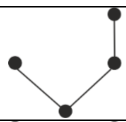
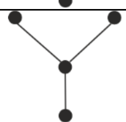
di mana

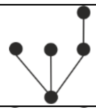
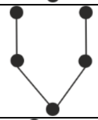
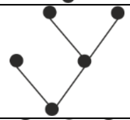
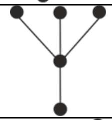
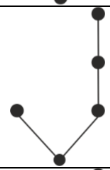
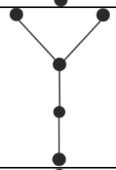
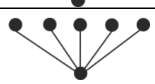
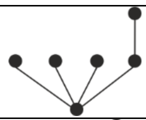
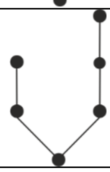
$$\begin{gathered}
k_1 = f(x_n + c_1 h, y_n + h(a_{11}k_1) \\
k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h(a_{22}k_2) \\
k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3) \\
k_4 = f(x_n + c_4 h, y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{44}k_4) \\
k_5 = f(x_n + c_5 h, y_n + h(a_{51}k_1 + a_{52}k_2 + a_{53}k_3 + a_{54}k_4 + a_{55}k_5) \\
k_6 = f(x_n + c_6 h, y_n + h(a_{61}k_1 + a_{62}k_2 + a_{63}k_3 + a_{64}k_4 + a_{66}k_6)
\end{gathered}$$

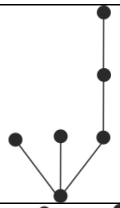
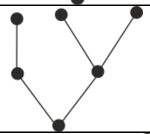
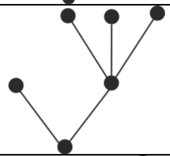
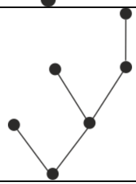
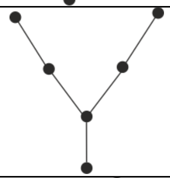
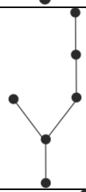
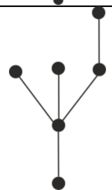
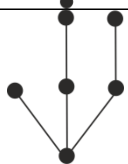
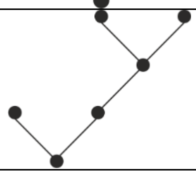
III. HASIL DAN PEMBAHASAN

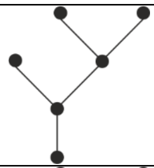
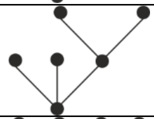
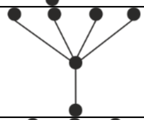
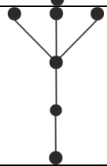
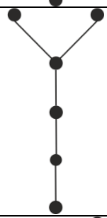
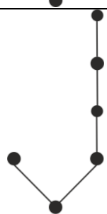
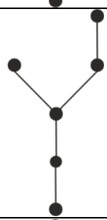
3.1. Penurunan Metode Runge Kutta Paralel Orde Keenam

Tabel 1 : Persamaan Kondisi Orde untuk Metode Runge – Kutta Orde Keenam

Orde Pohon	Pohon	Persamaan
1		$\sum_{i=1}^{6} b_i = 1$ (9)
2		$\sum_{i=1}^{6} b_i\, c_i = \frac{1}{2}$ (10)
3		$\sum_{i=1}^{6} b_i\, c_i^2 = \frac{1}{3}$ (11)
3		$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$ (12)
4		$\sum_{i=1}^{6} b_i\, c_i^3 = \frac{1}{4}$ (13)
4		$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$ (14)
4		$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12}$ (15)
4		$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}$ (16)
5		$\sum_{i=1}^{6} b_i\, c_i^4 = \frac{1}{5}$ (17)

Orde Pohon	Pohon	Persamaan	
5		$$\sum_{i=1}^{6} b_i\, c_i^2 a_{ij} c_j = \frac{1}{10}$$	(18)
5		$$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j a_{ik} c_k = \frac{1}{20}$$	(19)
5		$$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, c_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{15}$$	(20)
5		$$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j^3 = \frac{1}{20}$$	(21)
5		$$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, c_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{30}$$	(22)
5		$$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j a_{jk} c_k = \frac{1}{40}$$	(23)
5		$$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, a_{ij} a_{jk} c_k^2 = \frac{1}{60}$$	(24)
5		$$\sum_{i,j,k,l=1}^{6} b_i\, a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l = \frac{1}{120}$$	(25)
6		$$\sum_{i=1}^{6} b_i\, c_i^5 = \frac{1}{6}$$	(26)
6		$$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, c_i^3 a_{ij} c_j = \frac{1}{12}$$	(27)
6		$$\sum_{i,j,k,l=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j a_{ik} a_{kl} c_l = \frac{1}{72}$$	(28)

Orde Pohon	Pohon	Persamaan
6		$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, c_i^2 a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{36}$ (29)
6		$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j a_{ik} c_k^2 = \frac{1}{36}$ (30)
6		$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, c_i a_{ij} c_j^3 = \frac{1}{24}$ (31)
6		$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, c_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k = \frac{1}{48}$ (32)
6		$\sum_{i,j,k,l=1}^{6} b_i\, a_{ij} a_{jk} c_k a_{jl} c_l = \frac{1}{120}$ (33)
6		$\sum_{i,j,k,l=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j a_{jk} a_{kl} c_l = \frac{1}{180}$ (34)
6		$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, a_{ij} c_j^2 a_{jk} c_k = \frac{1}{60}$ (35)
6		$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, c_i a_{ij} c_j a_{ik} c_k = \frac{1}{24}$ (36)
6		$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, c_i a_{ij} a_{jk} c_k^2 = \frac{1}{72}$ (37)

Orde Pohon	Pohon	Persamaan
6		$$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, a_{ij}c_j a_{jk}c_k^2 = \frac{1}{90}$$ (38)
6		$$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, c_i^2 a_{ij}c_j^2 = \frac{1}{18}$$ (39)
6		$$\sum_{i,j=1}^{6} b_i\, a_{ij}c_j^4 = \frac{1}{30}$$ (40)
6		$$\sum_{i,j,k=1}^{6} b_i\, a_{ij}a_{jk}c_k^3 = \frac{1}{120}$$ (41)
6		$$\sum_{i,j,k,l=1}^{6} b_i\, a_{ij}a_{jk}a_{kl}c_l^2 = \frac{1}{360}$$ (4.45)
6		$$\sum_{i,j,k,l=1}^{6} b_i\, c_i a_{ij}a_{jk}a_{kl}c_l = \frac{1}{144}$$ (42)
6		$$\sum_{i,j,k,l=1}^{6} b_i\, a_{ij}a_{jk}c_k a_{kl}c_l = 1/240$$ (43)
6		$$\sum_{i,j,k,l,m=1}^{6} b_i\, a_{ij}a_{jk}a_{kl}a_{lm}c_m = \frac{1}{720}$$ (44)

Untuk mendapatkan metode Runge Kutta Orde Keenam Paralel Dua Prosesor (RK6P2), 37 persamaan harus dipenuhi. Beberapa asumsi digunakan untuk mengurangi dan menyederhanakan persamaan-persamaan ini sehingga akan lebih mudah diselesaikan. Asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut.

(i) $$\sum_{i=1}^{6} b_i a_{ij} = b_j(1-c_j) \qquad j = 1,2,\dots,6 \qquad (45)$$

(ii) $$\sum_{j=1}^{6} a_{ij}\, c_j = \frac{1}{2}c_i^2 \qquad i = 1,2,\dots,6 \qquad (46)$$

(iii) $$\sum_{j=1}^{6} a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{3}c_i^3 \qquad i = 1,2,\dots,6 \qquad (47)$$

Hasil yang didapatkan adalah sebagai berikut.

$\beta = 0.5$
$\gamma = 0.75$
$c_3 = 0.887298334620742$
$c_4 = 0.112701665379258$
$a_{31} = 7.425612356580850$
$a_{41} = -0.637298334620742$
$a_{51} = -7.044447576485710$
$a_{61} = 0.589466887858955$
$a_{32} = -7.03831402196011$
$a_{42} = 0.75$
$a_{52} = 7.70069757648571$
$a_{62} = -0.91238355452562$
$a_{53} = -0.242061459137964$
$a_{63} = 1.220892016839200$
$a_{54} = 0.0858114591379639$
$a_{64} = -0.6479753501725340$
$b_3 = 0.277777777777778$
$b_4 = 0.277777777777778$
$b_4 = 0.444444444444444$
$b_6 = 0$

Nilai a_{i1} untuk $i = 1,2,\dots,6$ didapatkan dengan hubungan berikut.

$$a_{i1} = c_i - \sum_{j=2}^{i} a_{ij}$$

3.2. Beberapa Masalah yang Diuji

Soal 1 :

$$y' = x\sqrt{y}$$
$$y(0) = 1, \qquad 0 \le x \le 1$$

Solusi eksak : $y = \frac{1}{16}(x^2+4)^2$

Soal 2 [11] :

$$y' = 1 - x + 4y$$
$$y(0) = 1, \quad 0 \le x \le 1$$

Solusi eksak : $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4x}$

Soal 3 [11] :

$$y' = 3 - 2x - \frac{1}{2}y$$
$$y(0) = 1, \qquad 0 \le x \le 1$$

Solusi eksak : $y = 14 - 4x - 13e^{-\frac{x}{2}}$

Soal 4 [12] :

$$y' = cos(2x)$$

$$y(0) = 4, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

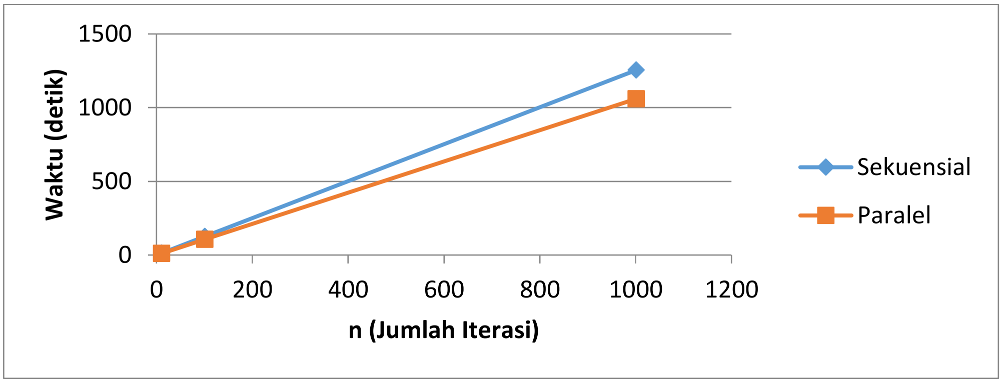
Solusi eksak : $y = \frac{1}{2}\sin(2x) + 4$

3.3. Hasil Perhitungan Numerik

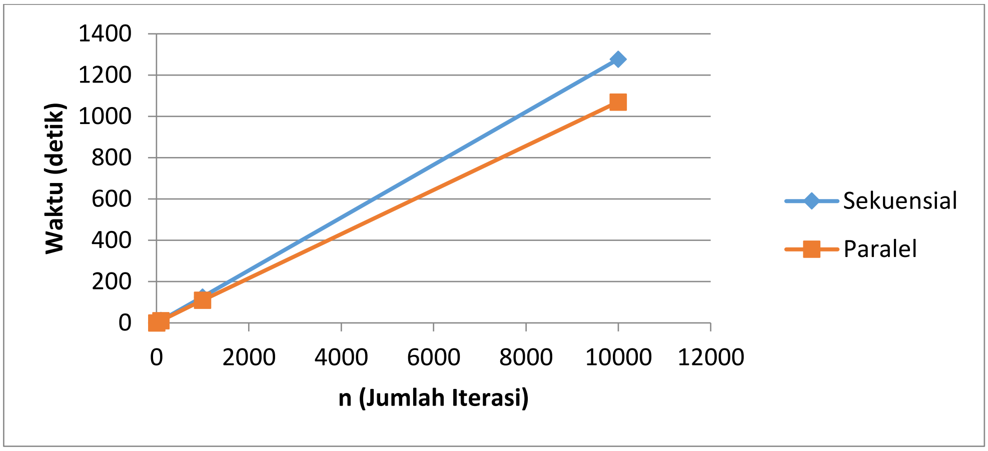
Tabel 2 : Nilai Galat Global Maksimal Soal 1-4 dengan RK6P2 dan Metode Runge-Kutta Orde Keenam Sekuensial.

Soal	Metode	GGM			
		$h = 10^{-1}$	$h = 10^{-2}$	$h = 10^{-3}$	$h = 10^{-4}$
4.1	RK6 Sekuensial RK6P2	4.208967514E-01 5.747495301E-03	2.540248972E-02 5.196076544E-04	1.997861321E-04 5.152970958E-05	6.177960423E-06 5.148848641E-06
4.2	RK6 Sekuensial RK6P2	5.517610286E+21 27.690802113	4.973988129E+02 4.606694386	1.160331254 0.491241462	3.569835844E-02 4.944969428E-02
4.3	RK6 Sekuensial RK6P2	2.572698161E+03 6.161572803E-03	6.896661067E-02 6.589274946E-04	4.686350413E-04 6.646579116E-05	1.443319117E-05 6.652443424E-06
4.4	RK6 Sekuensial RK6P2	2.476708120E-03 1.588773557E-11	2.479047647E-05 1.243449788E-14	2.479165868E-07 1.687538997E-14	2.479168870E-09 8.082423619E-14

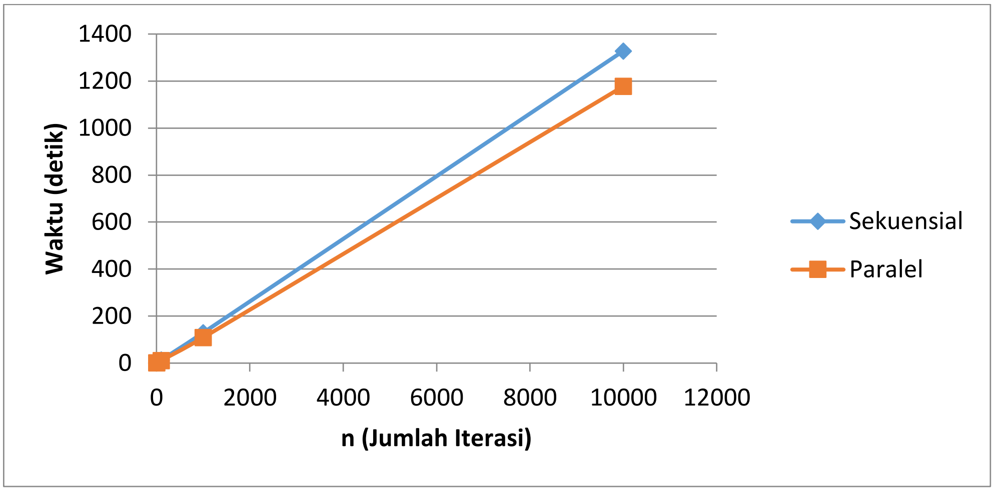
Gambar 5, 6, 7, dan 8 menunjukkan kinerja waktu eksekusi sekuensial dan paralel dengan ray python untuk masing-masing masalah yang diselesaikan.



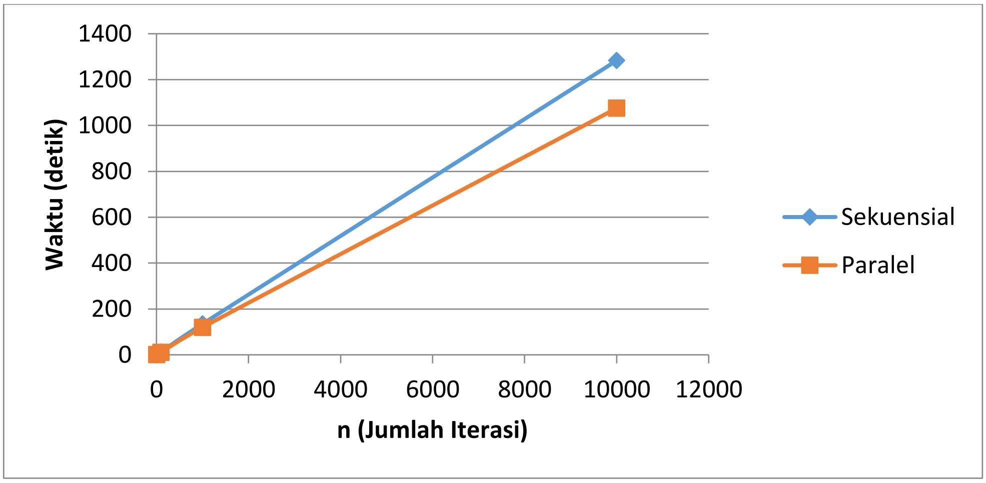
Gambar 5 : Waktu Eksekusi Sekuensial dan Paralel Ray Soal 1



Gambar 6 : Waktu Eksekusi Sekuensial dan Paralel Ray Soal 2



Gambar 7 : Waktu Eksekusi Sekuensial dan Paralel Ray Soal 3



Gambar 8 : Waktu Eksekusi Sekuensial dan Paralel Ray Soal 4

IV. KESIMPULAN

RK6P2 menunjukkan akurasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode sekuensial. Semakin kecil ukuran langkah yang digunakan, hasilnya menjadi lebih akurat. Dari seluruh soal yang diselesaikan, RK6P2 sudah mendekati nilai perhitungan solusi eksak dibandingkan dengan metode sekuensial dilihat dari nilai GGM yang diperoleh. Dari hasil yang diperoleh, terlihat bahwa untuk setiap peningkatan jumlah iterasi, waktu eksekusi paralel lebih baik daripada waktu eksekusi sekuensial. Penelitian berikutnya adalah dengan menambah jumlah prosesor dan penyelesaian masalah sistem persamaan diferensial.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. R. Gudula, "Parallel Implementations of Iterated Runge-Kutta Methods.," *Int. J. Supercomput. Appl. High Perform. Comput.*, vol. 10, no. 1, pp. 62–90, 1993.

[2]. H. Séka and A. Richard Kouassi, "A New Seventh Order Runge-kutta Family: Comparison with the Method of Butcher and Presentation of a Calculation Software," *Math. Comput. Sci.*, vol. 4, no. 3, p. 68, 2019, doi: 10.11648/j.mcs.20190403.12.

[3]. M. M. Ismail, "Goeken-Johnson Sixth-Order Runge-Kutta Method," *J. Educ. Sci.*, vol. 24, no. 1, pp. 119–128, 2011, doi: 10.33899/edusj.2011.51502.

[4]. D. Goeken and O. Johnson, "Runge-Kutta with higher order derivative approximations," *Appl. Numer. Math.*, vol. 34, no. 2, pp. 207–218, 2000, doi: 10.1016/S0168-9274(99)00128-2.

[5]. A. Fadhil and A. Al-Shimmary, "SOLVING INITIAL VALUE PROBLEM USING RUNGE-KUTTA 6 th ORDER METHOD," *J. Eng. Appl. Sci.*, vol. 12, pp. 3953–3961, Jul. 2017.

[6]. C. Liu, H. Wu, L. Feng, and A. Yang, "Parallel fourth-order Runge-Kutta method to solve differential equations," *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, vol. 7030 LNCS. pp. 192–199, 2011, doi: 10.1007/978-3-642-25255-6_25.

[7]. R. Method, U. Khair, S. Din, and F. Ismail, "Parallel Two-Processor Fifth Order Diagonally Implicit," vol. 33, no. 1, pp. 23–35, 2011.

[8]. A. G. Montejo, O. A. Michel-Manzo, and C. A. Terrero-Escalante, "On parallel solution of ordinary differential equations," 2016, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1601.02245.

[9]. J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods*. Wiley, Wiley-Interscience, 1987.

[10]. J. C. Butcher, "ON FIFTH AND SIXTH ORDER EXPLICIT RUNGE-KUTTA METHODS : ORDER CONDITIONS AND ORDER BARRIERS."

[11]. W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 10th ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 2012.

[12]. R. Maya, *Diktat Kuliah Persamaan Diferensial Biasa*, 6th ed. Bandung: IKIP Siliwangi, 2014.