Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 20 Nomor 1 Juni 2023 (Halaman 66 - 71)
doi: https://doi.org/10.22487/2540766X.2023.v20.i1.16360

JIMT
Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan

ISSN : 2540 – 766X

KARAKTERISTIK ALJABAR LIE *NONSOLVABLE* $\mathfrak{aff}(2)$

Edi Kurniadi[1] dan Alit Kartiwa[2]

[1,2,]Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Padjadjaran, Bandung, Indonesia
[1]edi.kurniadi@unpad.ac.id, [2]alit.kartiwa@unpad.ac.id

ABSTRACT

In this paper, we study the non-solvable affine Lie algebra of dimension six which is the Frobenius Lie algebra as well. There exists a linear functional or a 1-form which implies the affine Lie algebra is Frobenius. The research aims to show that the chosen linear functional can be computed explicitly and corresponds to 2-form structure. We also give the map between this affine Lie algebra and its duality corresponding to 2-form. The result showed that the existence of linear functionals implies the existence of a skew-symmetric nondegenerate closed 2-form as the first derivation of the linear functional. In addition, we also compute directly a principal element of the six dimensional affine Lie algebra.

Keywords : Affine Lie Algebra, Frobenius Lie Algebra, Linear Functional, 2-Form, Dual Vector Space.

ABSTRAK

Dalam artikel ini, dipelajari tentang aljabar Lie affine berdimensi 6 yang sekaligus merupakan aljabar Lie Frobenius. Terdapat fungtional linear atau 1-*form* yang mengakibatkan aljabar Lie affine merupakan aljabar Lie Frobenius. Tujuan penelitian ini adalah untuk membuktikan bahwa fungsional linear tertentu yang dipilih dapat dihitung secara eksplisit dan berkorespondensi dengan struktur 2-form. Diberikan juga pemetaan antara aljabar Lie affine dengan ruang dualnya yang juga didefinisikan berkaitan dengan 2-*form*-nya. Hasil yang diperoleh menunjukkan eksistensi fungsional linear tersebut mengakibatkan adanya *skew-symmetric nondegenerate closed* 2-*form* yang merupakan turunan pertama dari fungsional linearnya. Selanjutnya, dihitung juga elemen utama dari aljabar Lie affine berdimensi enam.

Kata kunci : Aljabar Lie Affine, Aljabar Lie Frobenius, Fungsional Linear, 2-Form, Ruang Vektor Dual.

I. PENDAHULUAN

Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan Frobenius jika terdapat fungsional linear atau 1-*form* $\psi \in \mathfrak{g}^*$ dengan $\mathfrak{g}^*$ adalah ruang vektor dual dari $\mathfrak{g}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in \mathfrak{g}$ berlaku $\partial\psi(x,y) = \omega(x,y) = \langle \psi, [x,y] \rangle$ di mana ω adalah *skew-symmetric nondegenerate closed* 2-*form* dan $\partial\psi$ adalah turunan pertama dari ψ. Jika aljabar Lie $\mathfrak{g}$ hanya mempunyai *skew-symmetric nondegenerate closed* 2-*form* maka aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan quasi-Frobenius. Ooms (1980) telah mengembangkan gagasan aljabar Lie Frobenius secara ekstensif beserta sifat-sifatnya seperti elemen utama suatu Frobenius dan konstruksi aljabar Lie Frobenius dari beberapa aljabar Lie. Penelitian-penelitian lainnya tentang aljabar Lie Frobenius misalnya dikembangkan oleh (Elashvili, 1982; Gerstenhaber & Giaquinto, 2009) dan (Diatta & Manga, 2014).

Dalam hasil penelitian (Hendrawan, Kurniadi, & Aisah, 2020) telah dibuktikan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2) = \mathrm{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\}$ berdimensi 6 adalah Frobenius dengan memilih suatu fungsional linear $f_0 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*$ dan membuktikan bahwa determinan matriks berukuran 6×6 yang entri-entrinya berbentuk $\langle f_0, [x,y] \rangle$ senantiasa tidak sama dengan nol. Meskipun demikian, pemilihan fungsional linear suatu aljabar Lie Frobenius tidak tunggal. Berbeda dengan hasil-hasil sebelumnya, dalam penelitian ini diberikan perhitungan untuk memilih fungsional linear lainnya yang mengakibatkan $\mathfrak{aff}(2)$ suatu aljabar Lie Frobenius. Selanjutnya, dibuktikan pula bahwa turunan pertama dari f_0 yang diperoleh adalah *skew-symmetric nondegenerate closed* 2-*form* dan dihitung secara eksplisit.

Selanjutnya, dengan memberikan rumus eksplisit pengaitan $\mu: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ yang didefinisikan oleh *interior derivative* $\mu(x) = int_x\omega$ dengan ω adalah *skew-symmetric nondegenerate closed* 2-*form* diperoleh bentuk eksplisit untuk ω dari μ. Oleh karena itu, hasil yang diperoleh sejalan dengan hasil yang didapat sebelumnya oleh (Gerstenhaber & Giaquinto, 2009). Gerstenhaber & Giaquinto (2009) telah memberikan contoh bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1) = \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$ berdimensi 2 adalah aljabar Lie Frobenius yang sekaligus j-aljabar. Dengan menggunakan Lie bracket $[x_1, x_2] = x_2$, fungsional linearnya adalah $\psi = x_2^*$ dengan $\omega = \partial\psi = \partial x_2^* = -x_1^* \wedge x_2^*$. Hasil ini diperluas untuk kasus aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2) = \mathrm{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\}$ berdimensi 6.

Hendrawan, Kurniadi, & Aisah (2020) telah membuktikan bahwa aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2)$ adalah aljabar simetrik kiri dengan menghitung semua produk perkalian berdasarkan pada bracket Lie-nya dan dikonstruksi berdasarkan pada suatu fungsional linearnya. Dengan demikian, dalam penelitian ini juga dibuktikan bahwa $\mathfrak{aff}(2)$ mempunyai elemen utama berkorespondensi dengan fungsional linearnya. Sebagai bahan diskusi aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2)$ dapat dipandang sebagai subaljabar Lie dari $\mathfrak{sl}(7, \mathbb{R})$. Di sisi lain, karena $\mathfrak{aff}(2)$ merupakan aljabar Lie Frobenius dan dengan menggunakan pemetaan dari $\mathfrak{aff}(2)$ ke ruang dualnya yaitu $\mathfrak{aff}(2)^*$, diperoleh juga rumus eksplisit pemetaannya terutama dalam menentukan semua elemen-elemen utama dari $\mathfrak{aff}(2)$.

II. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur melalui pengembangan dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(1)$ berdimensi 2 (Diatta & Manga, 2014). Langkah pertama yaitu dengan menentukan fungsional linear dari $\mathfrak{aff}(2)$ dan membuktikan turunan dari fungsional linear tersebut adalah *skew-symmetric nondegenerate closed* 2-*form*. Langkah kedua membuktikan bahwa turunan pertama tersebut mempunyai bentuk eksplisitnya. Langkah ke tiga mengkonstruksi pemetaan linear dari $\mathfrak{aff}(2)$ ke ruang dualnya dan menghitung semua elemen-elemen utama dari $\mathfrak{aff}(2)$. Sedangkan objek penelitian ini adalah aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2)$ berdimensi 6. Diberikan aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2)$ berdimensi 6 dengan basis $U = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\}$. Bracket Lie taknolnya diberikan oleh persamaan-persamaan berikut ini (Hendrawan, Kurniadi, & Aisah, 2020) :

$$\begin{array}{ccc} [\varepsilon_1, \varepsilon_2] = \varepsilon_2 & [\varepsilon_1, \varepsilon_3] = -\varepsilon_3 & [\varepsilon_1, \varepsilon_5] = \varepsilon_5 \\ [\varepsilon_2, \varepsilon_3] = \varepsilon_1 - \varepsilon_4 & [\varepsilon_2, \varepsilon_4] = \varepsilon_2 & [\varepsilon_2, \varepsilon_6] = \varepsilon_5 \\ [\varepsilon_3, \varepsilon_4] = -\varepsilon_3 & [\varepsilon_3, \varepsilon_5] = \varepsilon_6 & [\varepsilon_4, \varepsilon_6] = \varepsilon_6 \end{array} \quad (1)$$

Sebelum membahas hasil penelitian ini, berikut disampaikan terlebih dahulu landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 1 (McInerney, 2013). *Bentuk simetrik linear pada suatu ruang vektor* $\mathfrak{g}$ *adalah suatu fungsi* $\omega: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (x, y) \mapsto \omega(x, y) \in \mathfrak{g}$ *sedemikian sehingga* ω *suatu pemetaan bilinear, skew-symmetric dan non-degenerate yaitu* $\forall x \in \mathfrak{g}$ *dengan* $\omega(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}$ *maka* $x = 0$.

Contoh 1. Misalkan pada $\mathfrak{aff}(1)$ diberikan skew-symmetric non-degenerate-nya dalam bentuk $\omega(x, y) = -y^*([x, y]) = \langle -y^*, [x, y] \rangle$.

Definisi 2 (McInerney, 2013). *Suatu pemetaan multilinear yang diberikan oleh*

$$f: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \ni (x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto \mathbb{R} \quad (2)$$

dikatakan multilinear k*-form pada* $\mathfrak{g}$ *jika* f *linear untuk setiap komponennya.*

Himpunan semua k-*form* pada $\mathfrak{g}$ dinotasikan oleh $\Lambda_k(\mathfrak{g})$. Selanjutnya dalam penelitian ini diperlukan juga tentang notasi produk dalam atau *interior product* dari suatu k-*form*.

Definisi 3 (McInerney, 2013). *Misalkan* $\beta \in \Lambda_k(\mathfrak{g})$ *dan* $x \in \mathfrak{g}$. *Produk interior dari* β *terhadap* x *dinotasikan oleh* $int_x(\beta)$ *dan didefinisikan sebagai* $(k-1)$*-form sebagai berikut :*

$$\big(int_x(\beta)\big)(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \beta(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x). \quad (3)$$

Asosiator pada aljabar Lie $\mathfrak{g}$ diberikan oleh persamaan berikut ini

$$\Lambda(x, y, z) = (xy)z - x(yz), \quad (4)$$

untuk semua $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Definisi 4 (Diatta & Manga, 2014). *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *suatu aljabar Lie yang produk perkaliannya* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathfrak{g}$ *memenuhi kedua kondisi berikut :*

1. $\Lambda(x, y, z) = \Lambda(y, x, z)$

2. $xy - yx = [x, y]$

maka aljabar Lie $\mathfrak{g}$ *dikatakan sebagai aljabar simetrik kiri.*

Definisi 5 (Diatta & Manga, 2014). *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *suatu aljabar Lie Frobenius yang sekaligus dilengkapi dengan struktur aljabar simetrik kiri dan isomorfisma* $\mu: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ *yang didefinisikan* oleh *interior derivative* $\mu(x) = int_x \omega_0$ *dengan* ω_0 *adalah skew-symmetric nondegenerate closed* 2*-form. Vektor tunggal* ε_{ψ_0} *dikatakan elemen utama dari* $\mathfrak{g}$ *jika* $\mu(\varepsilon_{\psi_0}) = \psi_0$.

Contoh 2. Misalkan pada $\mathfrak{aff}(1) = span\{x, y\}$ dengan $[x, y] = y$ diberikan skew-symmetric non-degenerate-nya dalam bentuk $\omega(x, y) = -y^*([x, y]) = \langle -y^*, [x, y] \rangle$ dan isomorfima $\mu : \mathfrak{aff}(1) \to \mathfrak{aff}(1)^*$ diberikan oleh $\mu(x) = -y^*$ dan $\mu(y) = x^*$. Dalam hal ini fungsional linearnya adalah y^*. Jadi, $-x$ adalah elemen utama dari $\mathfrak{aff}(1)$. Misalkan terdapat elemen utama lain dari $\mathfrak{aff}(1)$, katakanlah x_1. Maka $\mu(x) = \mu(x_1)$. Karena μ pemetaan satu-satu maka $x = x_1$. Jadi, elemen utama dari $\mathfrak{aff}(1)$ tunggal. Hasil yang telah diperoleh Hendrawan, Kurniadi, & Aisah (2020) kita rangkum sebagai fakta-fakta berikut ini :

Fakta 1. Dalam ruang dual $\mathfrak{aff}(2)^*$ dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2)$ berdimensi 6 dengan basis $U = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\}$, terdapat fungsional linear $\psi_0 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*$ di mana determinan matriks yang semua entrinya diberikan oleh $\langle \psi_0, [\varepsilon_i, \varepsilon_j] \rangle$ tidak sama dengan nol. Oleh karena itu, $\mathfrak{aff}(2)$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Fakta 2. Produk perkalian pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2)$ memenuhi kondisi (1) dan (2) dalam Definisi 4. Oleh karena itu, aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2)$ merupakan aljabar simetrik kiri.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil utama dalam penelitian ini dinyatakan dalam dua proposisi sebagai berikut :

Proposisi 1. *Aljabar Lie affine* $\mathfrak{aff}(2)$ *berdimensi* 6 *dengan basis* $U = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\}$ *dan dualnya* $\mathfrak{aff}(2)^*$ *dengan basis* $U^* = \{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_6^*\}$ *mempunyai skew-symmetric non-degenerate closed* 2*-form berbentuk* $\omega = \partial\psi_0 = \partial(\varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*) = \varepsilon_2^* \wedge \varepsilon_6^*$.

Bukti. Pilih fungsional linear $\psi_0 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*$ (Hendrawan, Kurniadi, & Aisah, 2020). Pertama-tama kita seting pemetaan

$$\omega : \mathfrak{aff}(2) \times \mathfrak{aff}(2) \to \mathbb{R}$$

yang didefinisikan oleh $\omega(x, y) = \langle \psi_0, [x, y] \rangle = \psi_0([x, y])$. Terhadap basis $U = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\}$ dan bracket Lie pada persamaan (1) diperoleh bahwa determinan matriks yang entri-entrinya didefinisikan oleh $\omega(x, y)$ tidak sama dengan nol. Dengan demikian ψ_0 ini adalah suatu fungsional linear yang mengakibatkan $\mathfrak{aff}(2)$ suatu aljabar Lie Frobenius. Hal ini menjamin eksistensi *skew-symmetric nondegenerate closed* 2*-form* $\omega = \partial\psi_0$ sebagai turunan pertama dari fungsional linear atau 1*-form* ψ_0. Perhatikan determinan matriks yang semua entrinya didefinisikan sebagai fungsi $\langle \psi_0, [x, y] \rangle$ bernilai skalar 1 atau 0 yaitu $\psi_0(\varepsilon_i) = 1$ jika $i = 2$ atau $i = 6$ dan nol yang lainnya mempunyai nilai determinan tidak sama dengan nol.

$$\det(\langle\psi_0, [x,y]\rangle) = \begin{vmatrix} \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_2\rangle & \langle\psi_0, -\varepsilon_3\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_5\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle \\ \langle\psi_0, \varepsilon_2\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_1 - \varepsilon_4\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_2\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_5\rangle \\ \langle\psi_0, \varepsilon_4\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_4 - \varepsilon_1\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, -\varepsilon_3\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_6\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle \\ \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, -\varepsilon_2\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_3\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi, 0\rangle & \langle\psi_0, \varepsilon_6\rangle \\ \langle\psi_0, -\varepsilon_5\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, -\varepsilon_6\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle \\ \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, -\varepsilon_5\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, -\varepsilon_6\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle & \langle\psi_0, 0\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Dengan demikian kita peroleh $\omega = \partial\psi_0 = \partial(\varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*) = \sum_{i,j=1,2,\dots,6} \varepsilon_i^* \wedge \varepsilon_j^*$. Tetapi karena $\omega(x,y) = (\varepsilon_i^* \wedge \varepsilon_j^*)(x,y) = \begin{vmatrix} \varepsilon_i^*(x) & \varepsilon_i^*(y) \\ \varepsilon_j^*(x) & \varepsilon_j^*(y) \end{vmatrix} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i \neq 0$ dengan $x = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \cdots + \alpha_6\varepsilon_6$ dan $y = \beta_1\varepsilon_1 + \beta_2\varepsilon_2 + \cdots + \beta_6\varepsilon_6$ serta $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} - \{0\}, i,j = 1,2,3,\dots,6$ maka ω *non-degenerate*. Jika $\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i = 0$ maka ε_i merupakan kelipatan ε_j. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $U = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\}$ basis untuk $\mathfrak{aff}(2)$. Karena pertukaran baris suatu matriks mengakibatkan perubahan tanda determinan, yaitu:

$$\omega(x,y) = (\varepsilon_i^* \wedge \varepsilon_j^*)(x,y) = \begin{vmatrix} \varepsilon_i^*(x) & \varepsilon_i^*(y) \\ \varepsilon_j^*(x) & \varepsilon_j^*(y) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \varepsilon_j^*(x) & \varepsilon_j^*(y) \\ \varepsilon_i^*(x) & \varepsilon_i^*(y) \end{vmatrix} = -\omega(y,x)$$

maka ω bersifat *skew-symmetric*. Di sisi lain, karena $\partial\omega = \partial(\partial\psi_0) = 0$ maka ω bersifat *closed*.

Selanjutnya dengan menggunakan Definisi 5, kita peroleh elemen utama dari $\mathfrak{aff}(2)$ yang dinyatakan dalam Proposisi 2 sebagai berikut :

Proposisi 2. *Aljabar Lie affine* $\mathfrak{aff}(2)$ *berdimensi* 6 *dengan basis* $U = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\}$ *dan dualnya* $\mathfrak{aff}(2)^*$ *dengan basis* $U^* = \{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_6^*\}$ *mempunyai elemen utama* $2\varepsilon_1 + \varepsilon_4$.

Bukti. Kita gunakan Definisi 5 untuk menentukan elemen utama $\mathfrak{aff}(2)$. Diberikan isomorfisma $\mu: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ yang didefinisikan oleh *interior derivative* $\mu(x) = int_x\omega_0$ dengan 1-*form* $\psi_0 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*$ dan *skew-symmetric nondegenerate closed* 2-*form*-nya adalah $\omega = \partial\psi_0 = \sum_{i,j=1,2,\dots,6} \varepsilon_i^* \wedge \varepsilon_j^*$ (Lihat Proposisi 1). Kita akan mencari elemen di $\mathfrak{aff}(2)$ yang bergantung pada ψ_0-katakanlah q_{ψ_0}-sedemikian sehingga $\mu(q_{\psi_0}) = \psi_0$. Untuk lebih sederhana, kita notasikan q_{ψ_0} dengan q_0. Perhatikan bahwa $\omega(x,y) = \langle\psi_0, [x,y]\rangle$ dan $\mu(x) = int_x\omega = \omega(x,\cdot)$ untuk setiap $x, y \in \mathfrak{aff}(2)$. Oleh karena itu, akan diperlihatkan terdapat q_0 sedemikian sehingga $\mu(q_o) = int_{q_0}\omega = \omega(q_0, .) = \psi_0 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*$. Mengacu pada bracket Lie dalam Persamaan (1), perhatikan bahwa ψ_0 bernilai 1 untuk ε_2 atau ε_6. Di sisi lain dengan menghitung langsung $\omega(2\varepsilon_1 + \varepsilon_4, \cdot)$ diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\mu(2\varepsilon_1 + \varepsilon_4) = \omega(2\varepsilon_1 + \varepsilon_4, \cdot) = 2\omega(\varepsilon_1, \cdot) + \omega(\varepsilon_4, \cdot) = 2\langle\psi_0, [\varepsilon_1, \cdot]\rangle + \langle\psi_0, [\varepsilon_4, \cdot]\rangle = \psi_0.$$

Oleh karena itu, $2\varepsilon_1 + \varepsilon_4$ merupakan elemen utama dari $\mathfrak{aff}(2)$ berkorespondensi dengan fungsional linear $\psi_0 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*$.

IV. KESIMPULAN

Aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(2)$ adalah aljabar Lie Frobenius yang sekaligus mempunyai struktur aljabar simetrik kiri. Selanjutnya, terdapat fungsional linear $\psi_0 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*$ yang mengakibatkan determinan matriks yang entri=entrinya didefinisikan oleh fungsi $\langle \psi_0, [x, y] \rangle$ bernilai skalar 1 atau 0 yaitu $\psi_0(\varepsilon_i) = 1$ jika $i = 2$ atau $i = 6$ dan nol yang lainnya mempunyai nilai determinan tidak sama dengan nol. Selanjutnya diperoleh juga bahwa elemen utama dari $\mathfrak{aff}(2)$ berkorespondensi dengan fungsional linear $\psi_0 = \varepsilon_2^* + \varepsilon_6^*$ adalah $2\varepsilon_1 + \varepsilon_6$. Untuk penelitian selanjutnya, dapat dipelajari penyisipan $\mathfrak{aff}(2)$ sebagai subaljabar dari $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Diatta, A., & Manga, B. (2014). On properties of principil elements of Frobenius Lie algebras. *Journal of Lie Theory*, 849-864.

[2]. Elashvili, A. (1982). Frobenius Lie algebras. *Funkts.Anal.Priloz*, 94-95.

[3]. Hendrawan, A., Kurniadi, E., & Aisah, I. (2020). *Aljabar Simetrik kiri pada Aljabar Lie Frobenius riil berdimensi 6.* Bandung: Prodi Sarjana Matematika FMIPA Unpad.

[4]. M.Gerstenhaber, & A.Giaquinto. (2009). The Principal Elemen of Frobenius Lie algebra. *Lett.Math.Phys*, 333-341.

[5]. Mclnerney, A. (2013). *First Step in Differential Geometry.* New York: Springer.

[6]. Ooms, A. (1980). On Frobenius Lie algebras. *Comm. Algebra*, 13-52.