Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
Volume 20 Nomor 1 Juni 2023 (Halaman 85 - 96)
doi: https://doi.org/10.22487/2540766X.2023.v20.i1.16370

JIMT
Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan

ISSN : 2540 – 766X

INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS ORDO 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF MENGGUNAKAN ADJOIN

Ade Novia Rahma[1], Siti Mardhiyah Jauza [2], Corry Corazon Marzuki[3], dan Fitri Aryani[4]

[1,2,3,4] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
[1]adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id, [2]jauzah001@gamail.com [3] corry@uin-suska.ac.id, [4]khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

ABSTRACT

This research aims to determine the inverse of a Toeplitz matrix of a special shape of the order 4×4 of the rank of exponential number with positive integer exponent using adjoint. In determining the inverse Toeplitz matrix special shape several steps need to be done. First, consider the shape of the Toeplitz matrix pattern of the special forms ${T_4}^2$ to ${T_4}^{10}$ so that the general shape is obtained $({T_4}^n)$. Second, estimating the general form of the determinant of the special shape Toeplitz matrix $({T_4}^n)$. Next, estimating the general form of the cofactor matrix from the special shape Toeplitz matrix $({T_4}^n)$. Last, estimating the general inverse form of a special shape Toeplitz matrix $({T_4}^n)$. Proof of the general form of the matrix, determinant, cofactor matrix and inverse matrix using the mathematical induction method and direct proof. The final results in this research obtained the general form of the matrix, determinant, cofactor matrix and inverse of the Toeplitz matrix of special shapes positive.

Keywords : Determinant,Inverse Matrix, Toeplitz Matrix, Adjoint Method

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers dari suatu matriks Toeplitz bentuk khusus ordo 4 × 4 berpangkat bilangan bulat positif menggunakan adjoin. Dalam menentukan invers matriks Toeplitz bentuk khusus terdapat beberapa langkah yang perlu dikerjakan. Pertama, perhatikan bentuk pola matriks Toeplitz bentuk khusus $T4$ 2 sampai $T4$ 10 sehingga didapat bentuk umumnya. Kedua, perhatikan bentuk pola determinan matriks Toeplitz bentuk khusus $T4$ 2 sampai $T4$ 10 sehingga didapat bentuk umumnya. Selanjutnya, perhatikan bentuk pola matriks kofaktor dari matriks Toeplitz bentuk khusus $T4$ 2 sampai $T4$ 10 sehingga didapat bentuk umm matriks kofaktor dari matriks Toeplitz bentuk khusus. Terakhir, perhatikan bentuk pola invers matriks Toeplitz bentuk khusus $T4$ 2 sampai $T4$ 10 sehingga didapat bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus. Pembuktian dari bentuk umum matriks, determinan, matriks kofaktor dan invers matriks menggunakan metode induksi matematika dan pembuktian langsung. Hasil akhir dalam penelitian ini diperoleh bentuk umum matriks, determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks Toeplitz berpangkat bilangan bulat positif.

Kata Kunci : Determinan, Invers Matriks, Matriks Toeplitz, Metode Adjoin, Perpangkatan Matriks.

I. PENDAHULUAN

Bagian ini Aljabar linear merupakan bidang studi matematika yang salah satu objek pembahasannya mempelajari matriks. Terdapat banyak jenis matriks yang sering dibahas hingga saat ini, salah satunya adalah matriks Toeplitz [1][2][3][4]. Salah satu pembahasan dalam matriks yaitu mengenai invers matriks. Invers dikenal sebagai kebalikan dari suatu matriks. Banyak metode yang dapat digunakan untuk mencari invers matriks, salah satunya metode adjoin.

Pembahasan mengenai suatu matriks Toeplitz telah banyak diteliti oleh peneliti sebelumnya. Penelitian oleh [5] yang membahas tentang bentuk umum determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks Toeplitz. Kemudian pada tahun 2018, terdapat penelitian yang membahas tentang menentukan *trace* matriks Toeplitz Kompleks sehingga diperoleh bentuk umum perpangkatan dan *trace* dari matriks Toeplitz Kompleks [6]. Masih ditahun yang sama penelitian oleh [7] membahas determinan matriks Toeplitz menggunakan ekspamsi kofaktor.

Kemudian penelitian oleh [8] pada tahun 2019 melanjutkan penelitian sebelumnya [7] membahas tentang invers matriks Toeplitz. Selanjutnya, pada tahun yang sama [9] dengan menggunakan metode faddeev didapat hasil yaitu invers matriks Toeplitz-Hessenberg. Masih ditahun yang sama, penelitian oleh [10] membahas tentang *trace* matriks Toeplitz Simentris.

Selanjutnya pada tahun 2021 penelitian oleh [11] membahas tentang menentukan *trace* matriks Toeplitz 2-Tridiagonal sehingga diperoleh bentuk umum perpangkatan dan *trace* dari matriks Toeplitz 2-Tridiagonal. Masih ditahun yang sama [12] dengan menggunakan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor didapatkan hasil yaitu determinan matriks Toeplitz K-Tridiagonal.

Berdasarkan beberapa penelitian tersebut, penulis tertarik melanjutkan penelitian mengenai matriks Toeplitz dengan bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif. Sehingga judul Tugas Akhir ini adalah "Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Ordo 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin" dengan bentuk khusus matriks $t_0 = a$, $t_{-1} = b$ dan $t_{-2},\ t_{-3},\ t_1,\ t_2,\ t_3 = 0$ atau dapat ditulis sebagai berikut :

$$T_4 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

II. METODE PENELITIAN

Penelitian yang digunakan yaitu dengan cara studi literatur. Berikut beberapa langkah yang digunakan peneliti untuk menyelesaikan penelitian ini. Langkah pertama Diberikan suatu matriks Toeplitz khusus pada Persamaan (1), kemudian Menentukan perpangkatan matriks ${T_4}^2$ sampai ${T_4}^{10}$, Menduga bentuk umum matriks ${T_4}^n$ berpangkat bilangan bulat positif serta Membuktikan bentuk umum matriks ${T_4}^n$ menggunakan induksi matematika. Langkah Kedua, Menduga bentuk umum $|{T_4}^n|$

berpangkat bilangan bulat positif. Membuktikan bentuk umum $|{T_4}^n|$ menggunakan pembuktian langsung dengan metode ekspansi kofaktor. Langkah Ketiga Menduga bentuk umum matriks kofaktor dari matriks ${T_4}^n$ yaitu ${C_4}^n$. Membuktikan bentuk umum ${C_4}^n$ menggunakan pembuktian langsung dengan metode minor-kofaktor. Menduga bentuk umum $({T_4}^n)^{-1}$. Membuktikan bentuk umum $({T_4}^n)^{-1}$ menggunakan pembuktian ${T_4}^n({T_4}^n)^{-1} = ({T_4}^n)^{-1}{T_4}^n = I$.

Definisi 1 [13] Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan yang dibatasi dengan tanda kurung. Suatu matriks tersusun atas baris dan kolom, jika matriks tersusun atas m baris dan n kolom maka dikatakan matriks tersebut berukuran (berordo) $m \times n$. Penulisan matriks biasanya menggunakan huruf besar A, B, C dan seterusnya, sedangkan penulisan matriks beserta ukurannya (matriks dengan m baris dan n kolom) adalah $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ dan seterusnya. Bentuk umum dari $A_{m\times n}$ adalah:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

a_{ij} disebut elemen dari A yang terletak pada baris i dan kolom j

Definisi 2 [1] Sebuah matriks toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{k,j}; k, j = 0,1, \dots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$. Matriks Toeplitz dinyatakan dalam bentuk :

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Definisi 3 [14] Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif yaitu :

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n\,faktor} \quad (n > 0)$$

Akan tetapi, jika A dibalik, maka dapat didefenisikan pangkat bulat negatif yaitu

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \qquad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\,faktor}$$

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar, salah satunya adalah dengan ekspansi kofaktor. Berikut akan didefinisikan determinan dari matriks.

Definisi 4 [14] Jika A adalah matriks persegi, maka minor dari entri a_{ij} dinotasikan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan dari submatriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor dari entri a_{ij}.

Teorema 1 [14] Determinan dari matriks $A_{n\times n}$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh; dimana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

dan

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-i)

Suatu matriks akan mempunyai invers apabila determinan matriks tersebut tidak nol. Berikut akan didefinisikan invers dari matriks.

Definisi 5 [14] Jika A adalah matriks persegi dan jika matriks B yang berukuran sama dapat ditemukan sedemikian sehingga $AB = BA = I$ maka A dikatakan matriks yang dapat dibalik (non-singular) dan B disebut invers dari A. Jika matriks B tidak dapat ditemukan, maka A dikatakan singular.

Definisi 6 [14] Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor dari $\mathrm{a_{ij}}$, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Tranpos dari matriks ini disebut dengan adjoin A dan dinotasikan oleh $adj(A)$.

Syarat agar matriks A mempunyai invers adalah matriks A matriks nonsingular ($|A| \neq 0$). Jika matriks A matriks singular ($|A| = 0$), maka matriks A tidak mempunyai invers.

Teorema 2 [14] Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

Definisi 7 [15] Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, maka perlu dibuktikan bahwa :

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$. Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Matriks Toeplitz Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada bagian ini dibahas mengenai bentuk umum dari matriks toeplitz bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif seperti Persamaan (1). Menentukan matriks ${T_4}^2$ sampai ${T_4}^n$, dengan n adalah batas ketika pola matriks berpangkat sudah terlihat.

$$T_4{}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 & 0 \\ 0 & a^2 & 2ab & b^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$T_4{}^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2b & 3ab^2 & b^3 \\ 0 & a^3 & 3a^2b & 3ab^2 \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^2b \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$T_4{}^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3b & 6a^2b^2 & 4ab^3 \\ 0 & a^4 & 4a^3b & 6a^2b^2 \\ 0 & 0 & a^4 & 4a^3b \\ 0 & 0 & 0 & a^4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$T_4{}^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 5a^4b & 10a^3b^2 & 10a^2b^3 \\ 0 & a^5 & 5a^4b & 10a^3b^2 \\ 0 & 0 & a^5 & 5a^4b \\ 0 & 0 & 0 & a^5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$T_4{}^6 = \begin{bmatrix} a^6 & 6a^5b & 15a^4b^2 & 20a^3b^3 \\ 0 & a^6 & 6a^5b & 15a^4b^2 \\ 0 & 0 & a^6 & 6a^5b \\ 0 & 0 & 0 & a^6 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$T_4{}^7 = \begin{bmatrix} a^7 & 7a^6b & 21a^5b^2 & 35a^4b^3 \\ 0 & a^7 & 7a^6b & 21a^5b^2 \\ 0 & 0 & a^7 & 7a^6b \\ 0 & 0 & 0 & a^7 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$T_4{}^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 8a^7b & 28a^6b^2 & 56a^5b^3 \\ 0 & a^8 & 8a^7b & 28a^6b^2 \\ 0 & 0 & a^8 & 8a^7b \\ 0 & 0 & 0 & a^8 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$T_4{}^9 = \begin{bmatrix} a^9 & 9a^8b & 36a^7b^2 & 84a^6b^3 \\ 0 & a^9 & 9a^8b & 36a^7b^2 \\ 0 & 0 & a^9 & 9a^8b \\ 0 & 0 & 0 & a^9 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$T_4{}^{10} = \begin{bmatrix} a^{10} & 10a^9b & 45a^8b^2 & 120a^7b^3 \\ 0 & a^{10} & 10a^9b & 45a^8b^2 \\ 0 & 0 & a^{10} & 10a^9b \\ 0 & 0 & 0 & a^{10} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dengan melihat pola pada koefisien yang terbentuk dari elemen-elemen matriks pada Persamaan (4) sampai (12), maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks yang dinyatakan dalam Teorema 3.

Teorema 3. Diberikan $T_4 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Maka

$$T_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} \tag{13}$$

Bukti. Pembuktian menggunakan induksi matematika. Misalkan

$$p(n): {T_4}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

dibuktikan sebagai berikut :

1. Untuk $n = 1$ maka

$$p(1): T_4 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1}b & \left(\frac{1}{2}(1-1)1\right)a^{1-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(1-1)(1-2)1\right)a^{1-3}b^3 \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1}b & \left(\frac{1}{2}(1-1)1\right)a^{1-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^{1-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (1) maka $p(1)$ benar.

2. Asumsikan untuk $n = k, p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): {T_4}^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & \left(\frac{1}{2}(k-1)k\right)a^{k-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(k-1)(k-2)k\right)a^{k-3}b^3 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b & \left(\frac{1}{2}(k-1)k\right)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}$$

maka akan ditunjukkan untuk $n = k + 1, p(k + 1)$ juga benar yaitu :

$p(k+1): {T_4}^{k+1} =$

$$\begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & \left(\frac{1}{2}(k+1)k\right)a^{k-1}b^2 & \left(\frac{1}{6}(k+1)(k-1)k\right)a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & \left(\frac{1}{2}(k+1)k\right)a^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Pembuktiannya :

$${T_4}^{k+1} = {T_4}^k T_4$$

$$= \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & \left(\frac{1}{2}(k-1)k\right)a^{k-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(k-1)(k-2)k\right)a^{k-3}b^3 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b & \left(\frac{1}{2}(k-1)k\right)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & \left(\frac{1}{2}(k+1)k\right)a^{k-1}b^2 & \left(\frac{1}{6}(k+1)(k-1)k\right)a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & \left(\frac{1}{2}(k+1)k\right)a^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (14) maka $p(k + 1)$ benar.

Dan karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka Teorema 3 terbukti.

3.2. Determinan Matriks Toeplitz Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Berdasarkan Teorema 3, maka didapat bentuk umum determinan matriks toeplitz bentuk khusus beserta buktinya.

Teorema 4. Diberikan $T_4 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Maka $|T_4{}^n| = a^{4n}$.

Bukti : akan dibuktikan $|T_4{}^n| = a^{4n}$, sebagai berikut :

Berdasarkan Teorema 3, dapat diperoleh bentuk umum $|\mathrm{T}_4{}^{\mathrm{n}}|$ mengunakan pembuktian langsung dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama sebagai berikut :

$$T_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$\begin{aligned}
|T_4{}^n| = {} & a^n \begin{vmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} - \\
& 0 \begin{vmatrix} na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} + \\
& 0 \begin{vmatrix} na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} - \\
& 0 \begin{vmatrix} na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \end{vmatrix} \\
= {} & a^n(a^{3n}) - 0 + 0 - 0 \\
= {} & a^{4n}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti $|T_4{}^n| = a^{4n}$.

Berdasarkan pembuktian diatas, maka Teorema 4 terbukti.

3.3. Matriks Kofaktor Dari Matriks Toeplitz Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Berdasarkan Teorema 3, maka didapat bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus beserta buktinya.

Teorema 5. Diberikan $T_4 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Maka

$$C_4{}^n = \begin{bmatrix} a^{3n} & 0 & 0 & 0 \\ -na^{3n-1}b & a^{3n} & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^{3n} & 0 \\ -\left(\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n\right)a^{3n-3}b^3 & \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^{3n} \end{bmatrix}$$

Bukti : akan dibuktikan

$$C_4{}^n = \begin{bmatrix} a^{3n} & 0 & 0 & 0 \\ -na^{3n-1}b & a^{3n} & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^{3n} & 0 \\ -\left(\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n\right)a^{3n-3}b^3 & \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^{3n} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 3, dapat diperoleh bentuk umum $T_4{}^n$ yang akan digunakan untuk membuktikan dugaan bentuk umum matriks kofaktor mengunakan pembuktian langsung sebagai berikut :

$$T_4{}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = a^{3n}$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & a^n & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = -na^{3n-1}b$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a^n & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = a^{3n}$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & 0 & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a^n & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = -na^{3n-1}b$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = a^{3n}$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{6}(n+1)(n+2)n\right)a^{3n-3}b^3$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a^n & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & na^{n-1}b \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & na^{n-1}b \end{vmatrix} = -na^{3n-1}b$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} = a^{3n}$$

Dari perhitungan diatas, diperoleh :

$$C_4{}^n = \begin{bmatrix} a^{3n} & 0 & 0 & 0 \\ -na^{3n-1}b & a^{3n} & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^{3n} & 0 \\ -\left(\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n\right)a^{3n-3}b^3 & \left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^{3n} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pembuktian diatas maka Teorema 5 terbukti.

3.4. Invers Matriks Toeplitz Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus, diperoleh bentuk umumnya disajikan dalam Teorema 6 sebagai berikut :

Teorema 6. Diberikan $T_4 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Maka

$$(T_4{}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-\left(\frac{1}{6}(n+1)(n+2)n\right)b^3}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti : akan dibuktikan $({T_4}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-\left(\frac{1}{6}(n+1)(n+2)n\right)b^3}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$.

Pembuktian Teorema 6 cukup dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga ${T_4}^n({T_4}^n)^{-1} = ({T_4}^n)^{-1}{T_4}^n = I$.

Berdasarkan teorema 3 didapatkan bentuk umum ${T_4}^n$ yang akan digunakan untuk membuktikan dugaan bentuk umum perpangkatan invers matriks menggunakan pembuktian langsung sebagai berikut :

Untuk invers kiri :

$$
{T_4}^n({T_4}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-\left(\frac{1}{6}(n+1)(n+2)n\right)b^3}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I
$$

Untuk invers kanan :

$$
({T_4}^n)^{-1}{T_4}^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-\left(\frac{1}{6}(n+1)(n+2)n\right)b^3}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I
$$

Berdasarkan pembuktian diatas, terdapat matriks I sedemikian sehingga ${T_4}^n({T_4}^n)^{-1} = ({T_4}^n)^{-1}{T_4}^n = I$. Sehingga Teorema 6 terbukti.

IV. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa :

1. Bentuk umum dari matriks toeplitz bentuk khusus Persamaan (1) yaitu :

$$
{T_4}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 & \left(\frac{1}{6}(n-1)(n-2)n\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \left(\frac{1}{2}(n-1)n\right)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}
$$

2. Bentuk umum determinan matriks toeplitz bentuk khusus Persamaan (1) yaitu :

$$
|{T_4}^n| = a^{4n}
$$

3. Bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus Persamaan (1) yaitu :

$$
{C_4}^n = \begin{bmatrix} a^{3n} & 0 & 0 & 0 \\ -na^{3n-1}b & a^{3n} & 0 & 0 \\ (\frac{1}{2}(n+1)n)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^{3n} & 0 \\ -(\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n)a^{3n-3}b^3 & (\frac{1}{2}(n+1)n)a^{3n-2}b^2 & -na^{3n-1}b & a^{3n} \end{bmatrix}
$$

4. Bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus Persamaan (1) yaitu :

$$
({T_4}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-\left(\frac{1}{6}(n+1)(n+2)n\right)b^3}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\left(\frac{1}{2}(n+1)n\right)b^2}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}
$$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. R. M. Gray, "Toeplitz and Circulant Matrices: A Review," vol. 2, no. 3, pp. 155–239, 2006.

[2]. M. Akbulak and D. Bozkurt, "On the spectral norms of Toeplitz matrices with Fibonacci and Lucas numbers," Hacettepe J. Math. Stat., vol. 42, no. 1, pp. 15–19, 2013.

[3]. W. Yin, S. Morgan, J. Yang, and Y. Zhang, "Practical compressive sensing with Toeplitz and circulant matrices," Vis. Commun. Image Process. 2010, vol. 7744, no. July, p. 77440K, 2010.

[4]. S. Q. Shen, J. M. Cen, and Y. Hao, "On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers," Appl. Math. Comput., vol. 217, no. 23, pp. 9790–9797, 2011.

[5]. B. Siregar, "Menggunakan Metode Adjoin," vol. 02, no. 01, pp. 85–94, 2014.

[6]. F. Aryani, D. R. Sari, C. C. Marzuki, and S. Gemawati, "Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran Berpangkat Bilangan Bulat Positif," no. November, pp. 673–681, 2018.

[7]. F. Aryani and C. C. Marzuki, "Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan

Ekspansi Kofaktor," J. Sains Mat. dan Stat., vol. 4, no. 2, pp. 82–88, 2018.

[8]. C. C. Marzuki and F. Aryani, "Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin," vol. 5, no. 1, pp. 58–67, 2019.

[9]. Rahmawati, Saniyah, and A. D. Rahma, "Invers Matriks Toeplitz-Hessenberg Bentuk Khusus Menggunakan Metode Faddeev," no. November, pp. 405–411, 2019.

[10]. R. Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, and A. N. Rahma, "Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," J. Sains Mat. dan Stat., vol. 5, no. 2, pp. 61–70, 2019.

[11]. R. Olii, Resmawan, and L. Yahya, "Trace Matriks Toeplitz 2-Tridiagonal 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," vol. 15, no. 3, pp. 441–452, 2021.

[12]. Rasmawati, L. Yahya, A. R. Nuha, and Resmawan, "Determinan Suatu Matriks Toeplitz K-Tridiagonal," vol. 9, no. 1, pp.