MODIFIKASI DALAM PENAKSIR RASIO MENGGUNAKAN RANK SET SAMPLING

Iut Tri Utami[1]

[1]Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Untad,

e-mail: Triutami_iut@yahoo.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk memodifikasi penaksir rasio dengan menggunakan Rank Set Sampling $\left(\hat{R}_{mrss}\right)$. Varians dari penaksir ini akan diperoleh dan dibandingkan dengan varians rasio Rank Set Sampling klasik $\left(\hat{R}_{rss}\right)$. Dengan kondisi perbandingan ini menghasilkan penaksir yang dimodifikasi lebih efisien daripada penaksir klasik.

Kata Kunci : Rank Set Sampling, Simple Random Sampling, Penaksir Rasio

I. Pendahuluan

Metode menaksir rasio digunakan untuk memperoleh penaksir baru dengan presisi yang tinggi untuk menaksir rata-rata atau total populasi. (Scheaffer, dkk, 1990). McIntyre (1952) memperkenalkan metode Ranked Set Sampling (RSS) untuk menaksir hasil di padang rumput. McIntyre mengemukakan bahwa rata-rata dari m unit sampel berdasarkan RSS adalah sebuah penaksir dari rata-rata populasi. Penaksir ini adalah penaksir takbias dengan varians paling kecil dibandingkan dengan rata-rata sampel berdasarkan Simple Random Sampling (SRS) dengan ukuran yang sama.

II. Menaksir Rasio Menggunakan SRS

Andaikan bahwa $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$ adalah sampel acak bivariat dengan fungsi kepadatan peluang bivariat $f(x, y)$ dengan parameter $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$. Rasio populasi didefinisikan sebagai $R = \frac{\mu_y}{\mu_x}$ dimana penaksirnya adalah $\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ dengan varians :

$$Var(\hat{R}) = \frac{R^2}{n\bar{X}^2}\left(C_x^2 + C_y^2 - 2\rho C_x C_y\right)$$

dimana C_x adalah koefisien variasi populasi dari variabel x ; C_y adalah koefisien variasi populasi dari variabel y dan ρ adalah koefisien korelasi antara x dan y.

Kadilar dan Cingi (2004) menyatakan bahwa modifikasi dalam tipe penaksir rasio adalah

$$\hat{R}_{mrss} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{x}}$$

Dengan MSE adalah

$$MSE \cong \frac{1-f}{n\bar{X}^2}(R^2 S_x^2 + (1-\rho^2) S_y^2)$$

III. Menaksir Rasio Menggunakan RSS

Andaikan bahwa $(X_{11},Y_{11}),(X_{12},Y_{12}),..,(X_{1n},Y_{1n}),(X_{21},Y_{21}),..,(X_{2n},Y_{2n}),..,(X_{nn},Y_{nn})$ adalah vektor acak bivariat yang independen dengan fungsi distribusi kumulatif yang sama. $(X_{i[1]},Y_{i[1]}),..,(X_{i[n]},Y_{i[n]})$ adalah order statistik dari $X_{i[1]},X_{i[2]},...,X_{i[n]}$ dan $Y_{i[1]},Y_{i[2]},...,Y_{i[n]}$. Andaikan bahwa $(X_{1[1]},Y_{1[1]}),(X_{2[2]},Y_{2[2]}),..,(X_{n[n]},Y_{n[n]})$ merupakan sampel rank set dimana $(X_{i[i]},Y_{i[i]})$ adalah order statistik ke-i dalam sampel ke-i untuk variabel X dan Y maka penaksir rasio RSS yang dikemukakan oleh Samawi dan Muttlak (1996) adalah

$$\hat{R}_{rss} = \frac{\bar{y}_{(i)}}{\bar{x}_{(i)}}$$

Dimana $\vec{y}_{(i)}$ adalah rata-rata sampel dari variabel y dan $\bar{x}_{(i)}$ adalah rata-rata sampel dari variabell x.

Variansnya adalah

$$Var(\hat{R}_{RSS}) = \frac{R^2}{n}\left(C^2_{x[n]} + C^2_{y[n]} - 2\rho C_{x[n]}C_{y[n]}\right) \tag{3.1}$$

dimana

$$C_{x[i]} = \frac{S_{x[n]}}{\bar{X}} \ , \ C_{y[n]} = \frac{S_{y[n]}}{\bar{Y}}$$

III.1 Modifikasi penaksir rasio

Kita anggap bahwa penaksir yang dimodifikasi adalah

$$\hat{R}_{mrss} = \frac{\bar{y}_{i(n)} + b(\bar{X} - \bar{x}_{i(n)})}{\bar{x}_{i(n)}}$$

dimana

$$b = \frac{s_{x_{i[n]}y_{i[n]}}}{s^2_{x_{i[n]}}}$$

dimana $s^2_{x_{i[n]}}$ adalah varians sampel dari x dan $s_{x_{i[n]}y_{i[n]}}$ adalah kovarians antara variabel x dan y.

MSE dari penaksir ini dapat dihasilkan dengan menggunakan deret Taylor yang didefinisikan sebagai

$$h(\bar{x}_{in},\bar{y}_{in}) \cong h(\bar{X},\bar{Y}) + \frac{\partial h(c,d)}{\partial c}\Big|_{\bar{x}_{in},\bar{y}_{in}}(\bar{x}_{in} - \bar{X}) + \frac{\partial h(c,d)}{\partial c}\Big|_{\bar{x}_{in},\bar{y}_{in}}(\bar{y}_{in} - \bar{Y})$$

Dimana $h(\bar{x}_{i[n]},\bar{y}_{i[n]}) = \hat{R}_{mrss}$ dan $h(\bar{X},\bar{Y}) = R$ seperti ditunjukkan dalam Wolter (3.2) yang dapat diterapkan pada penaksir yang dimodifikasi untuk memperoleh MSE dari penaksir ini.

$$\hat{R}_{mrss} - R \cong \frac{\partial\left(\left(\bar{y}_{i[n]} + b(\bar{X} - \bar{x}_{i[n]})\right)/\bar{x}_{i[n]}\right)}{\partial \bar{x}_{i[n]}}\Big|_{\bar{X},\bar{Y}}(\bar{x}_{i[n]} - \bar{X}) + \frac{\partial\left(\left(\bar{y}_{i[n]} + b(\bar{X} - \bar{x}_{i[n]})\right)/\bar{x}_{i[n]}\right)}{\partial \bar{y}_{i[n]}}\Big|_{\bar{X},\bar{Y}}(\bar{y}_{i[n]} - \bar{Y}) \tag{3.2}$$

$$\hat{R}_{mrss} - R \cong -\left(\frac{\bar{y}_{i[n]}}{\bar{x}^2_{i[n]}} + \frac{b\bar{x}_{i[n]}}{\bar{x}^2_{i[n]}}\right)\Big|_{\bar{X},\bar{Y}}(\bar{x}_{i[n]} - \bar{X}) + \frac{1}{\bar{x}_{i[n]}}\Big|_{\bar{X},\bar{Y}}(\bar{y}_{i[n]} - \bar{Y})$$

$$E\left(\hat{R}_{mrss}-R\right)^2 \cong \frac{(1-f)}{n\bar{X}^2}\left\{\frac{(\bar{Y}+B\bar{X})^2}{\bar{X}^2}Var(\bar{x}_{i[n]})-\frac{2(\bar{Y}+B\bar{X})}{\bar{X}}Cov(\bar{x}_{i[n]},\bar{y}_{i[n]})+\text{var}(\bar{y}_{i[n]})\right\}$$

$$=\frac{(1-f)}{n\bar{X}^2}\left\{\frac{\bar{Y}^2+2B\bar{X}\bar{Y}+B^2\bar{X}^2}{\bar{X}}Var(\bar{x}_{i[n]})-\frac{2(\bar{Y}+B\bar{X})}{\bar{X}}Cov(\bar{x}_{i[n]},\bar{y}_{i[n]})+\text{var}(\bar{y}_{i[n]})\right\}$$

$$\cong\frac{(1-f)}{n\bar{X}^2}\left\{R^2S^2_{xi[n]}+2BR\rho S_{xi[n]}S_{yi[n]}+\rho^2S^2_{yi[n]}-2R\rho S_{xi[n]}S_{yi[n]}-2\rho^2S^2_{yi[n]}+S^2_{yi[n]}\right\}$$

$$\cong\frac{(1-f)}{n\bar{X}^2}\left\{R^2S^2_{x[i]}+S^2_{y[i]}(1-\rho^2)\right\}$$

$$\cong\frac{R^2}{n}\left(C^2_{x[i]}+C^2_{y[i]}(1-\rho^2)\right) \qquad (3.3)$$

Dimana

$$B=\frac{\rho S_{yi[n]}}{S^2_{xi[n]}}$$

ρ adalah koefisien korelasi populasi antara $X_{i[n]}$ dan $Y_{i[n]}$

$S^2_{x[i]}$ adalah varians populasi dari x dan

$S^2_{y[i]}$ adalah varians populasi dari y

$$S^2_{x[i]}=\frac{S^2_x}{n}-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}S^2_{[i]};\; S^2_{[i]}=E\left[X_{i[n]}-E(X_{i[n]})\right]^2$$

$$C_{x[i]}=\frac{S_{x[i]}}{\bar{X}},\quad C_{y[i]}=\frac{S_{y[i]}}{\bar{Y}}$$

Asumsikan bahwa penaksir bias pada persamaan (2.2) dapat diabaikan untuk ukuran sampel yang besar sehingga :

$$E(\hat{R}_{mrss}-R)^2=Var(\hat{R}_{mrss})$$

Jika $B=0$ pada penaksir yang dimodifikasi maka penaksir yang dimodifikasi akan sama dengan penaksir rasio dengan menggunakan RSS klasik.

III.2 Perbandingan Efisiensi

Pada bagian ini, kita bandingkan $Var(\hat{R}_{mrss})$ dengan $Var(\hat{R}_{rss})$ menggunakan persamaan (3.2) dan (3.1) yaitu :

$$Var(\hat{R}_{mrss})\le Var(\hat{R}_{rss})$$

$$\frac{R^2}{n}\left(C^2_{x[i]}+(1-\rho^2)C^2_{y[i]}\le\frac{R^2}{n}C^2_{x[i]}+C^2_{y[i]}-2\rho C_{x[i]}C_{y[i]}\right)$$

$$-\rho^2C^2_{y[i]}\le-2\rho C_{x[i]}C_{y[i]}$$

Sehingga modifikasi dari penaksir rasio dengan menggunakan RSS adalah

$$\rho\ge\frac{2C_{x[i]}}{C_{y[i]}}\ \text{jika}\ \rho\ge 0$$

$$\rho\ge\frac{2C_{xi}}{C_{yi}}\ \text{jika}\ \rho\le 0 \qquad (3.4)$$

Ketika kondisi (3.4) cukup maka penaksir rasio yang dimodifikasi akan lebih efisien daripada penaksir rasio dengan menggunakan rank set sampling klasik.

IV. Kesimpulan

Dengan kondisi perbandingan efisiensi dari penaksir rasio yang dimodifikasi dan penaksir rasio menggunakan rank set sampling akan menghasilkan penaksir rasio yang dimodifikasi lebih efisien daripada penaksir rank set sampling klasik.

V. Referensi

1. Kadilar, C. dan Cingi, H. 2004. *Ratio Estimator in Simple Random Sampling*. Applied Mathematics and Computation, 151, 893-902.
2. McIntyre, G. A. 1952. *A Method of Unbiased Selective Sampling Using Ranked Set. Australian*, J. Agricultural Research, 3, 385-390.
3. Samawi, H. M. And Muttlak, H. A. 1996. *Estimation of Ratio Using Rank Set Sampling, Biom*. Journal, 38, 753-764.
4. Scheaffer, R. L., Mendenhall, W., and Ott, L. 1990. *Elementary Survey Sampling.* Duxbury Press. California.
5. Wolter, K. M. 1985. *Introduction to Variance Estimation*, Springer-verlag.