JIMT
Vol. 13 No. 2 Desember 2016 (Hal 17 - 24)

JIMT
Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan

ISSN : 2450 – 766X

PELABELAN TOTAL TRINGULAR PADA BEBERAPA KELAS GRAF POHON

I. Yesi[1], I W. Sudarsana[2], dan S. Musdalifah[3]

[1,2,3] Program Studi Matematika Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tadulako
Jalan Sukarno-Hatta Km. 9 Palu 94118, Indonesia
[1]indahyesi94@gmail.com, [2]sudarsanaiwayan@yahoo.co.id, [3]selvymusdalifah@yahoo.com

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a graph with p vertices and q edges. A *triangular sum labeling* on graph G is an injective function $f: V \rightarrow N$, where N is the set of all non-negative integers, that induces a bijection $f^+: E(G) \rightarrow \{T_1, T_2, \ldots, T_q\}$ defined by $f^+(uv) = f(u) + f(v)$, for each edge $e = uv$ on G. The graph G which admits such labeling is called a triangular sum graph. In this research we showed that the graphs $K_{1,n} \odot \overline{K}_m$ for $n \geq 1$ and $m \geq 1$, homogeneous banana tree $B(m; n)$ for $m \geq 1$ and $n \geq 1$, and homogeneous firecracker $F(m; n)$ for $m \geq 1$ and $n \equiv 0 \; mod \; 5$ are triangular sum graphs.

Keywords : Corona, Homogeneous Banana Tree Graph, Homogeneous Firecracker Graph, Triangular Sum Labeling.

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf dengan p titik dan q sisi. *Pelabelan total triangular* dari graf G adalah fungsi injektif $f: V \rightarrow N$ dengan N adalah himpunan bilang bulat non negatif, yang menginduksi fungsi bijektif $f^+: E(G) \rightarrow \{T_1, T_2, \ldots, T_q\}$ yang didefinisikan sebagai $f^+(uv) = f(u) + f(v)$, untuk setiap sisi $e = uv$ di graf G. Graf G yang dapat dilabeli secara total triangular disebut graf total triangular. Pada penelitian ini telah berhasil ditunjukkan bahwa graf $K_{1,n} \odot \overline{K}_m$ untuk $n \geq 1$, dan $m \geq 1$, graf pohon pisang homogen $B(m; n)$ untuk $m \geq 1$, dan $n \geq 1$, dan graf kembang api homogen $F(m; n)$ untuk $m \geq 1$, dan $n \equiv 0 \; mod \; 5$ adalah graf *total triangular*.

Kata Kunci : Graf Pohon Pisang Homogen , Graf Kembang Api Homogen, Korona,Pelabelan Total Triangular.

I. PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu cabang matematika diskrit yang penting dan banyak manfaatnya, di antaranya dalam komunikasi, transportasi, sistem antrian dan penjadwalan. Dalam teori graf ada yang disebut dengan pelabelan graf. (Dalam Gallian, 2013) pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964) mengenai pelabelan ajaib, kemudian Stewart (1966) mengenai pelabelan sisi titik ajaib, Kotzig dan Rosa (1970) dalam jurnalnya *magic vauation of finite graph*. Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, teori koding, pemancar frekuensi radio, desain *integrated circuit* pada komponen elektronik dan riset operasi (Baskoro, 2007).

Hasil penelitian oleh Vaidya dkk (2009) menunjukkan beberapa kelas graf yang tidak memenuhi pelabelan total triangular diantaranya graf helm, graf $P_m + \overline{K}_n$, graf $W_m + \overline{K}_n$, graf roda, graf kincir, dan graf bunga. Juga menunjukkan bahwa siklus, siklus dengan tepat satu kord, dan siklus dengan tepat dua akord yang membentuk segitiga dengan sisi siklus. Beberapa temuan terkait *pelabelan total triangular* adalah Hegde dan Shankaran (2008) menunjukkan graf lintasan dan graf bintang adalah graf total triangular. Sementara itu, Seoud dan Salim (2012) membuktikan graf $P_m \cup P_n$ dengan $m \geq 4$, dan graf $P_n \odot \overline{K}_m$ adalah graf total triangular. Survey dalam Gallian (2013) diperoleh bahwa *pelabelan total triangular* terhadap graf bintang korona komplemen graf lengkap, graf pohon pisang homogen, dan graf kembang api homogen masih merupakan masalah terbuka. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dicari *pelabelan total triangular* pada graf bintang korona komplemen graf lengkap, graf pohon pisang homogen, dan graf kembang api homogen.

II. Metode Penelitian

2.1. Lokasi dan Tempat Penelitian

Lokasi dan tempat penelitian bertempat di Laboratorium Terapan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako.

2.2. Alat dan Bahan

Alat dan bahan yang digunakan pada penelitian ini adalah sebuah laptop dengan software pemrograman Microsoft Office Visio versi 2007 serta alat tulis menulis.

2.3. Jenis dan Sumber Data

Jenis data yang digunakan pada penelitian ini adalah data kualitatif yaitu data yang berupa graf yang bersumber dari beberapa buku, artikel, dan jurnal yang berkaitan dengan *pelabelan total triangular*.

2.4. Teknik Analisa Data

Teknik yang digunakan adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan informasi dari beberapa buku, artikel dan jurnal yang berkaitan dengan *pelabelan total triangular*.

2.5. Prosedur Penelitian

Penelitian dilakukan sesuai dengan prosedur dibawah ini :

1. Memulai penelitian.
2. Studi literatur.
3. Menotasikan titik dan sisi pada graf bintang korona komplemen graf lengkap, graf pohon pisang homogen, dan graf kembang api homogen.
4. Memberikan label pada titik dan sisi pada graf bintang korona komplemen graf lengkap, graf pohon pisang homogen, dan graf kembang api homogen.
5. Membuat formula *pelabelan total triangular* pada graf bintang korona komplemen graf lengkap, graf pohon pisang homogen, dan graf kembang api homogen.
6. Hasil.
7. Selesai.

III. Hasil

3.1. Pelabelan Total Triangular pada Graf

Sebelum ditunjukkan bahwa graf bintang korona komplemen graf lengkap, graf pohon pisang homogen, dan graf kembang api homogen adalah graf total triangular, pada bagian ini terlebih dahulu akan diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan pelabelan total triangular pada ketiga graf tersebut.

Definisi 1: *Bilangan triangular* adalah bilangan yang diperoleh dari penjumlahan semua bilangan bulat positif yang lebih dari atau sama dengan suatu bilangan bulat positif n. Untuk bilangan triangular ke-n dinotasikan dengan T_n yang diformulasikan dengan $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ (Vaidya et al., 2009).

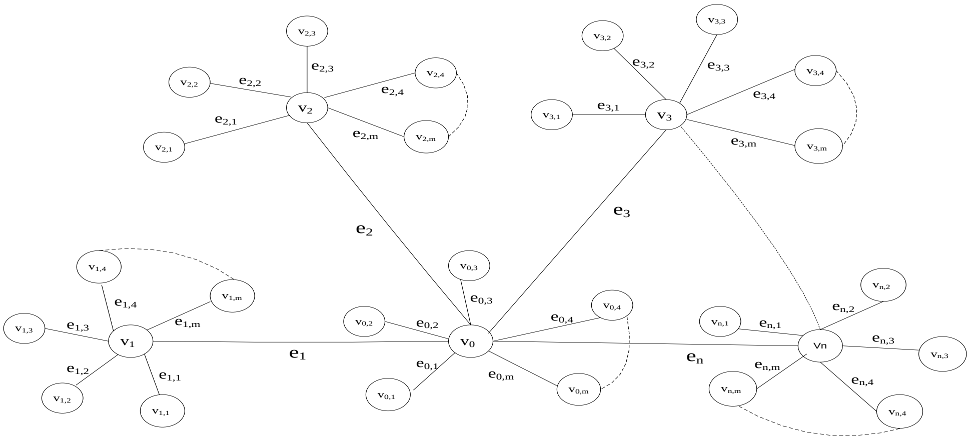
Definisi 2 : *Pelabelan Total Triangular* dari graf G adalah suatu fungsi satu-satu $f: V \rightarrow N$ dengan N adalah himpunan bilangan bulat non negatif, yang menginduksi fungsi bijektif $f^{+}: E(G) \rightarrow \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ yang didefinisikan sebagai $f^{+}(uv) = f(u) + f(v)$, untuk setiap sisi $e = uv$ di graf G. Graf yang dapat dilabeli secara total triangular disebut graf total triangular (Vaidya et al., 2009).

Definisi 3: Graf $G \odot H$ dibentuk dari graf G dan graf $|G|$ rangkap graf H, sebut $H^1, H^2, \dots, H^{|G|}$ dengan cara menghubungkan setiap titik di H^i ke titik x_i di G. $i = 1, 2, \dots, |G|$.

Definisi 4: Komplemen dari suatu graf $G = (V, E)$ adalah graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, dimana sisi-sisi di $\bar{G}$ adalah sisi-sisi yang tidak ada di G.

3.2. Graf Bintang Korona Komplemen Graf Lengkap $\boldsymbol{K_{1,n} \odot \bar{K}_m}$

Graf $K_{1,n} \odot \bar{K}_m$ adalah graf yang dibentuk dari graf $K_{1,n}$ dan graf $n + 1$ rangkap graf $\bar{K}_m$, sebut $\bar{K}_m{}^1, \bar{K}_m{}^2, \dots, \bar{K}_m{}^{n+1}$ dengan cara menghubungkan setiap titik di $\bar{K}_m{}^i$ ke suatu titik v_i di graf $K_{1,n}$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$.. Penotasian titik dan sisi pada graf $K_{1,n} \odot \bar{K}_m$ seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Penotasian Titik dan Sisi pada Graf $K_{1,n} \odot \bar{K}_m$

Berdasarkan gambar diatas, graf $K_{1,n} \odot \bar{K}_m$ dapat dinotasikan dengan himpunan titik dan sisi sebagai berikut :

$V(K_{1,n} \odot \bar{K}_m) = \{v_i | 0 \le i \le n\} \cup \{v_{i,j} | 0 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$... (1)

$E(K_{1,n} \odot \bar{K}_m) = \{e_i | 1 \le i \le n\} \cup \{e_{i,j} | 0 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$... (2)

Dengan $e_i = v_0 v_i \quad ; 1 \le i \le n,$ $\qquad e_{i,j} = v_i v_{i,j}; 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$

Teorema 1 : Graf bintang korona komplemen graf lengkap $K_{1,n} \odot \bar{K}_m$ adalah *total triangular* untuk $n \ge 1$, dan $m \ge 1$.

Bukti:

Fungsi satu-satu $f: V(K_{1,n} \odot \bar{K}_m) \to N$ dengan N adalah himpunan bilangan bulat non negatif, yang menginduksi fungsi bijektif $f^+: E(G) \to \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ sebagai berikut:

$f(v_0) = 0$

$f(v_i) = T_i \ ; i = 1, 2, \dots, n$

$f(v_{i,j}) = T_{(\boldsymbol{n}+1)j+i} - f(v_i) \ ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n\ ; j = 1, 2, \dots, m$

Berdasarkan fungsi titik tersebut diperoleh fungsi bijektif $f^{+}: E(K_{1,n} \odot \overline{K}_m) \to \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ dengan $q = n + m(n+1)$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$f^{+}(e_i) = f(v_0) + f(v_i) \quad = T_i \quad ; 1 \le i \le n$

$f^{+}(e_{i,j}) = f(v_i) + f(v_{i,j}) \quad = T_{(n+1)j+i} \quad ; 0 \le i \le n \quad ; 1 \le j \le m$

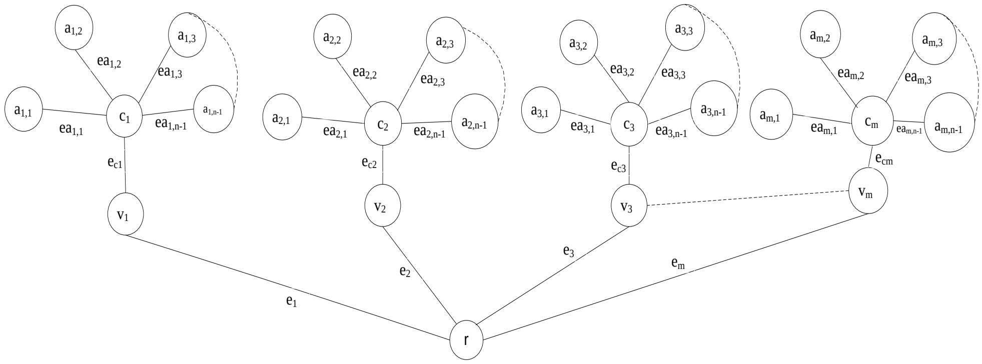
Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} f^{+}(E) &= \{f^{+}(e_i) | 1 \le i \le n\} \cup \{f^{+}(e_{i,j}) | \, 0 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m\} \\ &= \{T_i | 1 \le i \le n\} \cup \{T_{(n+1)j+i} | 0 \le i \le n \, ; \, 1 \le j \le m\} \\ &= \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_n\} \cup \{T_{n+1}, \dots, T_q\} \\ &= \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_q\} \quad dengan \quad q = n + m(n+1) \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa penjumlahan dua label titik pada graf bintang korona komplemen graf lengkap, $K_{1,n} \odot \overline{K}_m$, yang terhubung oleh sisi menghasilkan label sisi berupa *bilangan triangular*. Dengan demikian terbukti bahwa graf bintang korona komplemen graf lengkap $K_{1,n} \odot \overline{K}_m$ adalah graf *total triangular* untuk $n \ge 1$, dan $m \ge 1$.

3.3. Graf Pohon Pisang Homogen $\boldsymbol{B(m,n)}$

Sebuah graf pohon pisang (banana tree) $B(m;n)$ adalah sebuah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu simpul anting dari setiap m buah kopi graf bintang $K_{1,n}$ ke sebuah simpul baru yang disebut simpul akar r. Oleh karena graf bintang yang menyusun graf $B(m;n)$ mempunyai order yang sama, graf $B(m;n)$ disebut graf pohon pisang homogen. Penotasian titik dan sisi pada graf pohon pisang homogen $B(m,n)$ seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Penotasian Titik dan Sisi Pada Graf Pohon Pisang Homogen $B(m,n)$

Berdasarkan gambar diatas, graf $B(m;n)$ dapat dinotasikan dengan himpunan titik dan sisi sebagai berikut :

$V(B(m;n)) = \{c_i | 1 \le i \le m\} \cup \{a_{i,j} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n-1\} \cup \{v_i | 1 \le i \le m\} \cup \{r\}$ ....(3)

$E\big(B(m;n)\big) = \{e_i | 1 \le i \le m\} \cup \{ec_i | 1 \le i \le m\} \cup \{ea_{i,j} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n-1\}$..............(4)

Dengan $e_i = rv_i; 1 \le i \le m$, $ec_i = v_i c_i; 1 \le i \le m$, $ea_{i,j} = c_i a_{i,j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n-1$

Teorema 2: Graf pohon pisang homogen, $B(m;n)$ adalah *total triangular*untuk $m \ge 1$, dan $n \ge 1$.

Bukti :

Fungsi satu-satu $f: V(B(m;n)) \to N$ dengan N adalah himpunan bilangan bulat non negatif, yang menginduksi fungsi bijektif $f^+: E(B(m;n)) \to \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ sebagai berikut:

$$f(r) = 0$$
$$f(v_i) = T_{(n+1)i-n} \qquad ; 1 \le i \le m$$
$$f(c_i) = T_{(n+1)i-(n-1)} - f(v_i) \qquad ; 1 \le i \le m$$
$$f(a_{i,j}) = T_{(\boldsymbol{n}+1)i-(n-(j+1))} - f(c_i) \ ; 1 \le i \le m \ ; 1 \le j \le n-1$$

Berdasarkan fungsi titik tersebut diperoleh fungsi bijektif $f^+: E(B(m;n)) \to \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ dengan $q = m + mn$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f^+(e_i) = f(r) + f(v_i) = T_{(n+1)i-n} \qquad ; 1 \le i \le m \ ; n \ge 1$$
$$f^+(ec_i) = f(v_i) + f(c_i) = T_{(n+1)i-(n-1)} \qquad ; 1 \le i \le m \ ; n \ge 1$$
$$f^+\big(ea_{i,j}\big) = f(c_i) + f\big(a_{i,j}\big) = T_{(\boldsymbol{n}+1)i-(n-(j+1))} \qquad ; 1 \le i \le m \ ; n \ge 1 \qquad ; 1 \le j \le n-1$$

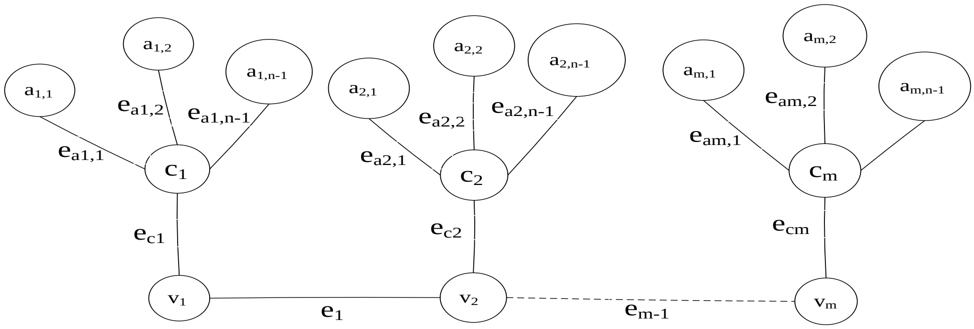
Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} f^+(E) &= \{f^+(e_i) | 1 \le i \le m\} \cup \{f^+(ec_i) | 1 \le i \le m\} \\ &\quad \cup \{f^+\big(ea_{i,j}\big) \big| ; 1 \le i \le m \ dan \ 1 \le j \le n-1\} \\ &= \{T_{(n+1)i-n} \big| 1 \le i \le m \ ; n \ge 1\} \cup \{T_{(n+1)i-(n-1)} \big| 1 \le i \le m \ ; n \ge 1\} \\ &\quad \cup \left\{T_{(\boldsymbol{n}+1)i-(n-(j+1))} \middle| 1 \le i \le m \ ; n \ge 1 \ ; 1 \le j \le n-1\right\} \\ &= \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_q\} \quad dengan \quad q = m + mn \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa penjumlahan dua label titik pada graf pohon pisang homogen, $B(m;n)$, yang terhubung oleh sisi menghasilkan label sisi berupa *bilangan triangular*. Dengan demikian terbukti bahwa graf pohon pisang homogen,$B(m;n)$, adalah graf *total triangular* untuk $m \ge 1$, dan $n \ge 1$.

3.4. Graf Kembang Api Homogen $\boldsymbol{F(m,n)}$

Graf kembang api (firecracker) adalah sebuah graf yang diperoleh dengan menghubungkan m buah graf bintang K_{1,n_i} dengan cara menghubungkan satu simpul anting dari setiap graf bintang K_{1,n_i} dengan $1 \le i \le m$ dan dinotasikan dengan $F(m; n_1, n_2, \dots, n_m)$. Jika $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n$, graf kembang api disebut graf kembang api homogen dan dinotasikan dengan $F(m;n)$. Penotasian titik dan sisi pada graf kembang api homogen $F(m,n)$ seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Penotasian titik dan sisi Pada Graf Kembang Api Hmogen $F(m,n)$

Berdasarkan gambar diatas, graf kembang api homogen $F(m;n)$ dapat dinotasikan dengan himpunan titik dan sisi sebagai berikut :

$V\big(B(m;n)\big) = \{v_i|1 \le i \le m\} \cup \{c_i|1 \le i \le m\} \cup \{a_{i,j}|1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n-1\}$................(5)

$E\big(B(m;n)\big) = \{e_i|1 \le i \le m-1\} \cup \{ec_i|1 \le i \le m\} \cup \{ea_{i,j}|1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n-1\}$......(6)

Dengan $e_i \quad = v_i v_{i+1}; 1 \le i \le m-1, \quad ec_i \quad = v_i c_i; 1 \le i \le m,$

$ea_{i,j} = c_i a_{i,j}; 1 \le i \le m, 1 \le j \le n-1$

Teorema 3: Graf Kembang Api Homogen, $F(m;n)$ adalah *total triangular*untuk $m \ge 1$, dan $n \equiv\ 0\ mod\ 5$.

Bukti:

Fungsi satu-satu $f: V(F(m;n)) \to N$ dengan N adalah himpunan bilangan bulat non negatif, yang menginduksi fungsi bijektif $f^+: E(F(m;n)) \to \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ sebagai berikut :

$f(v_1) \ = 0$

$f(v_i) \ = T_{(n+1)i-(n+1)} - f(v_{i-1}) \qquad ; 2 \le i \le m, \quad n \equiv 0\ mod\ 5$

$f(c_i) \ = T_{(n+1)i-n} - f(x_i) \qquad ; 1 \le i \le m \quad n \equiv 0\ mod\ 5$

$f\big(a_{i,j}\big) = T_{(\boldsymbol{n}+1)i-(n-j)} - f(c_i); 1 \le i \le m, \quad n \equiv 0\ mod\ 5 \qquad ;\ 1 \le j \le n-1$

Berdasarkan fungsi titik tersebut diperoleh fungsi bijektif $f^+: E(F(m;n)) \to \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ dengan $q = m + m(n-1) + 1$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$f^+(e_i) = f(v_i) + f(v_{i+1}) \quad = T_{(n+1)i+1-(n+1)} \qquad ; 1 \le i \le m-1 \qquad n \equiv 0\ mod\ 5$

$f^+(ec_i) = f(v_i) + f(c_i) \quad = T_{(n+1)i-n} \qquad ; 1 \le i \le m \qquad n \equiv 0\ mod\ 5$

$f^+\big(ea_{i,j}\big) = f(c_i) + f\big(a_{i,j}\big) \ = T_{(\boldsymbol{n}+1)i-(n-j)} \qquad ; 1 \le i \le m \qquad n \equiv 0\ mod\ 5\ ;\ 1 \le j \le n-1$

Dengan demikian diperoleh:

$$
\begin{aligned}
f^{+}(E) &= \{f^{+}(e_i) | 1 \le i \le m-1\ ;\ n \equiv 0 \bmod 5\} \cup \{f^{+}(ec_i) |\ 1 \le i \le m\ ;\ n \equiv 0 \bmod 5\} \\
&\quad \cup \{f^{+}(ea_{i,j}) |\ ; 1 \le i \le m\ ;\ n \equiv 0 \bmod 5\ \ ; 1 \le j \le n-1\} \\
&= \{T_{(n+1)i+1-(n+1)} | 1 \le i \le m-1\ ;\ n \equiv 0 \bmod 5\} \cup \{T_{(n+1)i-n} | 1 \le i \le m\ ; n \equiv 0 \bmod 5\} \\
&\quad \cup \{T_{(n+1)i-(n-j)} | 1 \le i \le m\ ;\ n \equiv 0 \bmod 5\ ;\ 1 \le j \le n-1\}
\end{aligned}
$$

$$f^{+}(E) = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 \dots, T_q\} \qquad ; q = m + m(n-1) + 1$$

Diperoleh bahwa penjumlahan dua label titik pada graf kembang api homogen $F(m;n)$, yang terhubung oleh sisi menghasilkan label sisi berupa *bilangan triangular*. Dengan demikian terbukti bahwa graf kembang api homogen $F(m;n)$ adalah graf *total triangular* untuk $m \ge 1$, dan $n \equiv 0 \bmod 5$.

IV. Kesimpulan

Berdasarkan bukti-bukti pada Teorema 1, Teorema 2, dan Teorema 3 diperoleh bahwa graf bintang korona komplemen graf lengkap, $K_{1,n} \odot \overline{K}_m$, graf pohon pisang homogen $B(m;n)$, dan graf kembang api homogen $F(m;n)$ adalah graf *total triangular*. Khusus graf kembang api homogen $F(m;n)$ yang diperoleh hanya untuk $n \equiv 0 \bmod 5$. Sementara itu, untuk $n \not\equiv 0 \bmod 5$ masih menjadi masalah terbuka, sehingga peneliti lain dapat melanjutkannya untuk mengkaji pelabelan total triangular untuk graf kembang api homogen $F(m;n)$ dengan $n \not\equiv 0 \bmod 5$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Baskoro, E. T, Miller, M, Slamin, and Wallis, W. D, *Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf*, Institut Teknologi Bandung, 2007, Bandung.

[2]. Gallian, A., A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics,* Edisi 16, 2013 (http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS6/pdf, diakses 29 Desember 2014).

[3]. Hegde, S. M and Shankaran, P, On triangular sum labelings of graphs, in Labeling of Discrete Structures and Applications, Narosa Publishing House, New Delhi, 2008, 109-115.

[4]. Seoud, M. A and Salim,M. A, Further results on triangular sum graphs, *International Math. Forum,* 7, 2012, no 48, 2393-2405. http//www.m-hikari.com/imf/imf-2012/45-48-2012/seoudIMF45-48-2012.pdf.

[5]. Vaidya, S.K, Prajapati, U.M, and Vihol, P.L,Some Important Results on Triangular Sum Graphs, *Applied Mathematical Sciences,* 3, 2009, 1763-1772.