

ANALISA KESTABILAN MODEL SEIRS PENYAKIT SCABIES PADA POPULASI HEWAN DAN MODEL SEIS PADA POPULASI MANUSIA

S.S.Nyamun¹, R.Ratianingsih², A.I.Jaya³

^{1,2,3}Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako
Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia

¹suwitosartono@yahoo.co.id, ^{2,3}rinaningsih@yahoo.com

ABSTRACT

Scabies is a type of skin disease that is transmitted very quickly either through direct contact or indirect contact. These diseases pose a public health problem because of increasing number of cases every year and the unavailability of an efficient prevention method. This study is aimed to find a mathematical model of Scabies spread in animal populations and human populations. The models are in SEIRS (susceptible, Exposed, Infected, Recovered and Susceptible) and SEIS (susceptible, Exposed, Infected and Susceptible) models. Those models are analyzed to study the stability of each of its critical points using the linearization method. The research found model maths and result show that the models have unstable critical points T_1 and T_2 and stable critical points T_0 dan T_3 . The Scabies model also have an endemic critical point that means the diseases is stay in the population.

Keywords : Endemic, Scabies, SEIRS Model , SEIS Model.

ABSTRAK

Scabies merupakan salah satu jenis penyakit kulit yang penularannya sangat cepat baik melalui kontak langsung maupun kontak tak langsung. Penyakit ini menimbulkan gangguan kesehatan masyarakat karena mengalami peningkatan jumlah kasus di setiap tahunnya dan tidak tersedianya metode penanggulangan yang efisien. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan model matematika penyebaran penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia. Pada model SEIRS (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered* dan *Susceptible*) dan model SEIS (*Susceptible, Exposed, Infected* dan *Susceptible*). Model dianalisa kestabilan disetiap titik-titik kritis menggunakan metode linierisasi. Dari hasil penelitian ini didapatkan model matematika dan hasil analisa titik kritis T_1 dan T_2 yang tidak stabil dan T_0 dan T_3 yang stabil. Menggambarkan bahwa model memiliki titik kritis endemik yang berarti bahwa penyakit Scabies akan terus ada didalam populasi.

Kata Kunci : Endemik, Scabies ,SEIRS Model , SEIS Model.

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Scabies adalah penyakit kulit yang disebabkan oleh infestasi dan sensitisasi terhadap *Sarcoptes scabiei* dan produknya (Handoko, 2010). Scabies merupakan penyakit ektoparasit, yang umumnya terabaikan sehingga menjadi masalah kesehatan yang umum di seluruh dunia (Heukelbach *et al.*, 2006). Salah satu penyebab munculnya penyakit menular adalah lingkungan yang tidak sehat. Scabies dapat diderita semua orang tanpa membedakan usia dan jenis kelamin, akan tetapi lebih sering ditemukan pada anak-anak usia sekolah dan dewasa muda/remaja (Murtiastutik, 2008). Penyakit Scabies ini mudah menular dari manusia ke manusia, dari hewan ke manusia serta sebaliknya. Penularan Scabies sangat cepat baik melalui kontak langsung maupun kontak tak langsung. Oleh sebab itu penyakit ini mengalami peningkatan jumlah kasus di daerah yang terjangkau terutama di daerah yang padat penghuninya seperti, asrama, rumah tahanan, panti asuhan, tempat kost, pesantren dan tempat peternakan. Berdasarkan data sejak tahun 2010 hingga tahun 2013 penyakit Scabies mengalami peningkatan jumlah kasus baik kasus yang baru maupun kasus yang lama (Dinkes Kota Palu, 2013).

Penelitian lebih lanjut untuk mengamati penyebaran penyakit tersebut dapat dilakukan melalui pemodelan matematika. Pemodelan matematika menjadi alat pendekatan yang menarik untuk menganalisis penyebaran penyakit menular. Dalam penelitian ini penyebaran penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia dikaji melalui model SEIS (*Susceptible, Exposed, Infected dan Susceptible*) dan SEIRS (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered dan Susceptible*). Model SEIRS merupakan model penyebaran penyakit yang terjadi karena individu yang telah sembuh dari sakit akan mengalami kekebalan, tetapi hanya sementara, selanjutnya kekebalan akan menurun dan pada akhirnya hilang. Kemudian pada saat kekebalan menghilang maka individu tersebut masuk dalam populasi rentan (*Susceptible*) kembali. Kestabilan model SEIRS dan model SEIS akan dikaji melalui matriks linierisasi sistem, yaitu matriks Jacobi.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang tersebut, maka permasalahan yang dikemukakan dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimana model matematika dari penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia?
2. Bagaimana kestabilan dari titik kritis model penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia?

1.3. Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah diatas, penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan :

1. Model matematika penyebaran penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia melalui model SEIS dan SEIRS.
2. Analisa kestabilan model penyebaran penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia.

1.4. Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat antara lain:

1. Meningkatkan pemahaman tentang penyakit Scabies.
2. Secara umum untuk mengembangkan ilmu matematika, khususnya pada bidang matematika biologi yang diterapkan pada masalah-masalah penyebaran penyakit.
3. Penelitian ini juga memiliki dampak yang positif bagi perkembangan multidisiplin ilmu di Indonesia, yaitu Matematika, Biologi, dan Ilmu Kesehatan Masyarakat.

1.5. Batasan Masalah

Dalam Penelitian ini peneliti hanya meneliti transmisi terjadinya penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia tanpa melihat kontak antar kedua populasi.

II. METODE PENELITIAN

2.1. Jenis dan Sumber Data

Secara umum jenis data yang digunakan adalah data kuantitatif yang meliputi nilai awal masing-masing kelompok populasi dan parameter-parameter yang tercakup dalam model matematika yang bersumber dari literatur yang ada, sedangkan sumber data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder.

2.2. Prosedur Penelitian

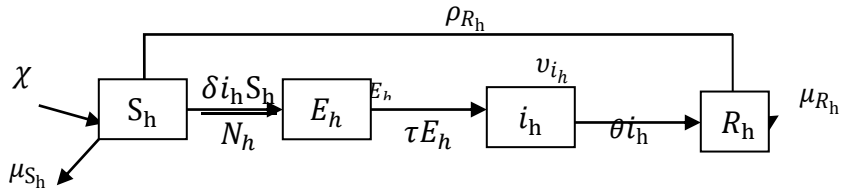
Penelitian dilakukan sesuai prosedur dibawah ini :

1. Memulai penelitian.
2. Mengkaji literatur, membuat asumsi-asumsi, mendefinisikan parameter yang digunakan pada model penyakit Scabies.
3. Membangun model matematika penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia .
4. Menentukan titik-titik kritis model tersebut serta menganalisa sifat kestabilan titik-titik kritis dari model tersebut.
5. Membuat simulasi.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Model Matematika Penyakit Scabies Pada Populasi Hewan (Model SEIRS)

Model penyakit Scabies pada populasi hewan dibangun dari diagram alir penyebaran penyakit tersebut sebagai berikut :



Gambar 1. Kompartemen penyakit Scabies pada populasi hewan

Melalui diagram alir pada gambar 1 populasi hewan yang rentan terinfeksi penyakit (S_h), populasi hewan yang berada dalam masa inkubasi (E_h), populasi hewan yang terinfeksi (i_h), populasi hewan yang telah sembuh (R_h), dengan jumlah total populasi $N_h = S_h + E_h + i_h + R_h$, dibangun dalam suatu model matematika dalam bentuk sistem Persamaan diferensial tak linier sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \chi - \frac{\delta i_h S_h}{N_h} - \mu S_h + \rho R_h \dots\dots\dots (1)$$

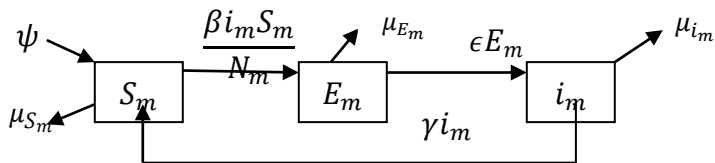
$$\frac{dE_h}{dt} = \frac{\delta i_h S_h}{N_h} - \tau E_h - \mu E_h \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{di_h}{dt} = \tau E_h - \theta i_h - \nu i_h \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \theta i_h - \rho R_h - \mu R_h \dots\dots\dots (4)$$

3. 2. Model Matematika Penyakit Scabies Pada Populasi Manusia (Model SEIS)

Model penyakit Scabies pada populasi manusia dibangun dari diagram alir penyebaran penyakit tersebut sebagai berikut :



Gambar 2. Kompartemen penyakit Scabies pada populasi manusia.

Diagram tersebut tidak melibatkan kompartemen (R_m) karena penyakit scabies pada manusia proses penularannya sangat cepat. Melalui diagram alir pada gambar 2, populasi manusia yang rentan terinfeksi penyakit (S_m), populasi manusia yang berada dalam masa inkubasi (E_m), populasi manusia yang terinfeksi (i_m), dengan jumlah total populasi $N_m =$

$S_m + E_m + i_m$, dibangun dalam suatu model matematika dalam bentuk sistem Persamaan diferensial tak linier sebagai berikut :

$$\frac{dS_m}{dt} = \psi - \frac{\beta i_m S_m}{N_m} - \mu S_m + \gamma i_m \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\beta i_m S_m}{N_m} - \epsilon E_m - \mu E_m \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{di_m}{dt} = \epsilon E_m - \gamma i_m - \mu i_m \dots\dots\dots (7)$$

3.3. Penentuan Titik Kritis Model SEIRS Pada Populasi Hewan $T((S_h, E_h, i_h, R_h))$

Titik kritis model SEIRS pada populasi hewan ditentukan melalui Persamaan (1) – (4) dalam keadaan stagnan atau tidak terdapat perubahan dalam populasi.

$$\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dE_h}{dt} = 0, \frac{di_h}{dt} = 0, \frac{dR_h}{dt} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

Sehingga diperoleh dua Titik kritis. Titik kritis pertama menyatakan populasi bebas penyakit yang diekspresikan sebagai $T_0 = (\frac{\chi}{\mu}, 0, 0, 0)$, selanjutnya titik kritis ini disebut titik kritis bebas penyakit. Titik kritis kedua menyatakan populasi yang terjangkit penyakit yang diekspresikan sebagai $T_1 = (S_h, E_h, i_h, R_h)$, dimana:

$$S_h = \frac{N_h(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu)}{\delta\tau} \dots\dots\dots (9)$$

$$E_h = - \frac{(\theta + \nu)(N_h\mu(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu) - \chi\delta\tau)(\rho + \mu)}{\delta\tau(\rho + \mu)(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu)} \dots\dots\dots (10)$$

$$i_h = - \frac{(N_h\mu(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu) - \chi\delta\tau)(\rho + \mu)}{\delta(\rho + \mu)(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu)} \dots\dots\dots (11)$$

$$R_h = - \frac{\theta(N_h\mu(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu) - \chi\delta\tau)}{\delta(\rho + \mu)(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu)} \dots\dots\dots (12)$$

selanjutnya titik kritis ini disebut Titik Kritis Endemik dan syarat eksistensi titik kritis T_1 sebagai berikut:

$$\chi\delta\tau > N_h\mu(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu) \dots\dots\dots (13)$$

3.4. Penentuan Titik Kritis Model SEIS Pada Populasi Manusia $T((S_m, E_m, i_m))$

Titik kritis model SEIS pada populasi hewan ditentukan melalui Persamaan (5) – (7) dalam keadaan stagnan atau tidak terdapat perubahan dalam populasi.

$$\frac{dS_m}{dt} = 0, \frac{dE_m}{dt} = 0, \frac{di_m}{dt} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

Sehingga diperoleh dua Titik kritis. Titik kritis pertama menyatakan populasi bebas penyakit yang diekspresikan sebagai $T_2 = (\frac{\psi}{\mu}, 0, 0)$, selanjutnya titik kritis ini disebut titik kritis bebas penyakit. Titik kritis kedua menyatakan populasi yang terjangkit penyakit yang diekspresikan sebagai $T_3 = (S_m, E_m, i_m)$, dimana:

$$S_m = \frac{N_m(\gamma\epsilon + \mu\epsilon + \mu\gamma + \mu^2)}{\beta\epsilon} \dots\dots\dots (15)$$

$$E_m = \frac{(\mu + \gamma)(\psi\beta\epsilon - \mu N_m(\gamma\epsilon + \mu\epsilon + \mu\gamma + \mu^2))}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)\epsilon} \dots\dots\dots (16)$$

$$i_m = \left(\frac{\psi\beta\epsilon - \mu N_m(\gamma\epsilon + \mu\epsilon + \mu\gamma + \mu^2)}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)} \right) \dots\dots\dots (17)$$

selanjutnya titik kritis ini disebut Titik Kritis Endemik dan syarat eksistensi titik kritis T_3 sebagai berikut:

$$\psi\beta\epsilon > \mu N_m(\gamma\epsilon + \mu\epsilon + \mu\gamma + \mu^2) \dots\dots\dots(18)$$

3.5. Kestabilan Titik Kritis $T_0((S_h, E_h, i_h, R_h)$ Pada Populasi Hewan

Untuk kestabilan titik kritis bebas penyakit terlebih dahulu dilakukan linearisasi karena karena S_h tidak sama dengan nol. Matriks Jacobi persamaan (1) – (4) yang dievaluasi dititik (0,0,0,0) memberikan Persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0 \dots\dots\dots(19)$$

Dengan :

$$A = 1$$

$$B = \mu + \rho + \theta + v + \tau$$

$$C = \frac{1}{\mu N_h} (3\mu^3 N_h + 2N_h(\rho + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{2}v + \tau)\mu^2 + ((v + \rho + \theta)\tau + \rho(v + \theta))N_h\mu - \chi\delta\tau)$$

$$D = \frac{1}{\mu N_h} (\mu^4 N_h + N_h(\rho + \tau + 3\theta + 3v)\mu^3 + ((\rho + 2v + 2\theta)\tau + 2\rho(v + \theta))N_h\mu^2 + (\rho(v + \theta)N_h - 2\chi\delta)\tau\mu - \rho\chi\delta\tau)$$

$$E = \frac{1}{N_h} (N_h(v + \theta)\mu^2 + N_h\tau(v + \theta)\mu - \chi\delta\tau)(\rho + \mu)$$

Dari Persamaan karakteristik tersebut didapat koefisien A dan B bernilai positif sedangkan koefisien C,D dan E bernilai positif jika $\frac{1}{\mu N_h} (3\mu^3 N_h + 2N_h(\rho + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{2}v + \tau)\mu^2 + ((v + \rho + \theta)\tau + \rho(v + \theta))N_h\mu > \chi\delta\tau$, $\frac{1}{\mu N_h} (\mu^4 N_h + N_h(\rho + \tau + 3\theta + 3v)\mu^3 + ((\rho + 2v + 2\theta)\tau + 2\rho(v + \theta))N_h\mu^2 + (\rho(v + \theta)N_h)\tau\mu > (2\chi\delta\tau\mu + \rho\chi\delta\tau)$, $\frac{\chi\delta\tau}{N_h\mu} < (v + \theta)(\tau + \mu)$. Koefisien-koefisien tersebut ditabelkan mengikuti karakteristik *Routh-Hurwitz* sebagai berikut:

| | | | |
|-------------|-------|-------|---|
| λ^4 | A | C | E |
| λ^3 | B | D | 0 |
| λ^2 | b_1 | b_2 | 0 |
| λ^1 | c_1 | 0 | 0 |
| λ^0 | d_1 | 0 | 0 |

Dengan

$$b_1 = \frac{BC-AD}{B}, b_2 = E, c_1 = \frac{DBC-AD^2-B^2E}{DBC-AD^2}, d_1 = E$$

Syarat kestabilan *Ruth Hurwitz* terpenuhi karena semua koefisien Persamaan karakteristik bernilai positif dan semua elemen-elemen dari kolom pertama pada tabel *Ruth Hurwitz* mempunyai tanda yang sama Sehingga didapatkan $b_1 > 0, c_1 > 0,$ dan $d_1 > 0$. Maka titik T_0 bersifat stabil.

3.6. Kestabilan Titik Kritis $T_1((S_h, E_h, i_h, R_h)$ Pada Populasi Hewan

Untuk kestabilan titik kritis endemik terlebih dahulu dilakukan linearisasi. Sehingga linearisasi sistem dititik kritis baru (0,0,0,0) memberikan Persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \dots\dots\dots(20)$$

Dengan :

$$\begin{aligned}
 a_4 &= 1 \\
 a_3 &= \frac{1}{(N_h((\theta+v)\mu^2+(\theta+v)(\rho+\tau)\mu+\rho\tau v))} (N_h(\theta+v)\mu^3 + N_h(\theta+v)(\theta+v+2\tau+\rho)\mu^2 + ((\rho+\tau)v^2 + (\tau^2 + (2\theta+2\rho)\tau + 2\theta\rho)v + \theta(\theta\rho + \tau\theta + \tau^2))N_h + \chi\delta\tau)\mu + \tau\rho(v(\theta+\tau)N_h + \chi\delta)) \\
 a_2 &= -\frac{1}{N_h((\theta+v)\mu^2+(\theta+v)(\rho+\tau)\mu+\rho\tau v)} (\tau((N_h\theta\rho - \chi\delta)\mu - \chi\delta\rho)(\mu + v + \tau + \theta)) \\
 a_1 &= -\frac{1}{N_h((\theta+v)\mu^2+(\theta+v)(\rho+\tau)\mu+\rho\tau v)} ((\rho + \mu)(\mu + \tau)(N_h(\theta+v)\mu^2 + N_h\tau(\theta+v)\mu - \chi\delta\tau)(\theta + v)) \\
 a_0 &= \frac{1}{N_h((\theta+v)\mu^2+(\theta+v)(\rho+\tau)\mu+\rho\tau v)} (\theta(N_h(\theta+v)\mu^2 + N_h\tau(\theta+v)\mu - \chi\delta\tau)\tau(\rho + \mu)\rho)
 \end{aligned}$$

Dari Persamaan karakteristik tersebut didapat koefisien a_4 , a_3 dan a_0 bernilai positif sedangkan koefisien a_2 dan a_1 bernilai negatif yang dinyatakan dalam tabel *Routh Hurwitz* sebagai berikut:

$$\begin{array}{l}
 \lambda^4 \left| \begin{array}{ccc} a_4 & a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Dengan :

$$b_1 = \frac{a_3 a_2 - a_1 a_4}{a_3}, b_2 = \frac{a_3 a_0}{a_3} = a_0, c_1 = \frac{a_1 a_2 a_3 - a_4 a_1^2 - a_3^2 a_0}{a_1 a_2 a_3 - a_4 a_1^2}, d_1 = a_0$$

Syarat kestabilan *Ruth Horwitz* tidak terpenuhi karena ada beberapa koefisien pada Persamaan karakteristik bernilai negatif atau mempunyai tanda yang tidak sama pada kolom pertama tabel *Ruth Horwitz*. Sehingga didapatkan $b_1 > 0, c_1 > 0$ dan $d_1 < 0$. Maka titik kritis T_1 bersifat tidak stabil.

3.7. Kestabilan Titik Kritis $T_2((S_m, E_m, I_m))$ Pada Populasi Manusia

Untuk kestabilan titik kritis bebas penyakit terlebih dahulu dilakukan linearisasi karena karena S_m tidak sama dengan nol. Matriks Jacobi persamaan (5) – (7) yang dievaluasi dititik (0,0,0) menghasilkan nilai-nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu \dots\dots\dots (21)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2\mu N_m} (Y_2 - \sqrt{X_2}) \dots\dots\dots (22)$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2\mu N_m} (Y_2 + \sqrt{X_2}) \dots\dots\dots (23)$$

dimana $Y_2 = 2\mu^2 N_m + N_m \epsilon \mu + N_m \mu \gamma, X_2 = \epsilon^2 \mu^2 N_m - N_m 2\mu^2 \epsilon \gamma + N_m \mu^2 \gamma^2 + 4\mu \psi \beta \epsilon N_m$. Nilai λ_1, λ_3 dan λ_2 positif jika $Y_2 < \sqrt{X_2}$ dengan $\beta = \frac{\mu N_m (\mu + \epsilon) (\mu + \gamma)}{\epsilon \Psi}$ sehingga sistem

tersebut tidak stabil dititik kritis T_2 .

3.8. Kestabilan Titik Kritis $T_3((S_m, E_m, I_m))$ Pada Populasi Manusia

Kestabilan titik kritis endemik juga terlebih dahulu dialkukan linearisasi. Sehingga linearisasi sistem dititik kritis baru (0,0,0,0) memberikan nilai eigen :

$$\lambda_1 = -\mu \dots\dots\dots (24)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2\mu(\epsilon+\gamma+\mu)N_m} (Y_3 - (\sqrt{X_3})) \dots\dots\dots(25)$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2\mu(\epsilon+\gamma+\mu)N_m} (Y_3 + (\sqrt{X_3})) \dots\dots\dots(26)$$

Dimana :

$$Y_3 = \psi\beta\epsilon + 2\mu^2\gamma N_m + 2\epsilon\mu^2 N_m + \mu\epsilon\gamma N_m + \mu^3 N_m + \epsilon^2\mu N_m + N_m\mu\gamma^2 \quad \text{dan} \quad X_3 = 6\epsilon\gamma^3\mu^2 + 8\mu^3\gamma^3 + \mu^2\gamma^4 - 6\psi\beta\epsilon^2\mu\gamma N_m - 2N_m\psi\beta\epsilon\mu\gamma^2 - 4N_m\psi\beta\epsilon^2\mu^2 - 2\psi\beta\epsilon N_m\mu^3 - 2\psi\beta N_m\epsilon^3\mu + 18\mu^4\gamma^2 N_m^2 + 16\mu^5\gamma + 18\epsilon^2\mu^4 + 16\epsilon\mu^5 N_m^2 + 8\epsilon^3\mu^3 N_m^2 + 8\gamma^3\mu^3 N_m^2 + \epsilon^4\mu^2 N_m^2 + \gamma^4\mu^2 N_m^2 + \psi^2\beta^2\epsilon^2 N_m^2 + 38\mu^4 N_m^2\gamma\epsilon + 28\mu^3 N_m^2\gamma^2\epsilon + 28\mu^3 N_m^2\gamma\epsilon^2 + 11\mu^2\gamma^2 N_m^2\epsilon^2 + 6\mu^2\gamma\epsilon^3 N_m^2 + 6\mu^2\gamma^3\epsilon N_m^2 - 4N_m\psi\beta\epsilon\mu^2\gamma + 5\mu^6 N_m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nilai λ_1, λ_2 dan λ_3 adalah negatif jika $Y_3 > \sqrt{X_3}$, sehingga sistem tersebut stabil di titik kritis T_3 .

3.9. Simulasi

Dalam penelitian ini dilakukan simulasi model yang bertujuan untuk melihat penyebaran penyakit Scabies dalam populasi hewan dan populasi manusia. Simulasi dilakukan dengan bantuan software matematika Maple 13 dengan memberikan nilai parameter pada model untuk menjelaskan kondisi penyebaran penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia. Parameter dan nilai awal yang digunakan dalam penelitian ini dinyatakan pada tabel 1 – tabel 4.

Tabel 1. Parameter Populasi Hewan dan Nilainya

| Parameter | Nilai | Sumber |
|-----------|--------------|--|
| χ | 0.018265 | $\frac{1}{life\ time} \times \text{jumlah populasi}$ |
| μ | 0.00018265 | $\frac{1}{life\ time}$ |
| ν | 0.011111 | Dibangkitkan |
| θ | 0.033333 | Dibangkitkan |
| δ | 7 | Dibangkitkan |
| | 0.0000067785 | Syarat Kestabilan |
| τ | 5 | Dibangkitkan |
| ρ | 0.083333 | Dibangkitkan |

Tabel 2. Parameter Populasi Manusia dan Nilainya

| Parameter | Nilai | Sumber |
|-----------|-------------|--|
| ψ | 15.017 | $\frac{1}{life\ time} \times \text{jumlah populasi}$ |
| μ | 0.000042150 | $\frac{1}{life\ time}$ |

| | | |
|------------|--------------|-------------------|
| β | 7 | Dibangkitkan |
| | 0.0000035411 | Syarat kestabilan |
| ϵ | 5 | Dibangkitkan |
| γ | 0.083333 | Dibangkitkan |

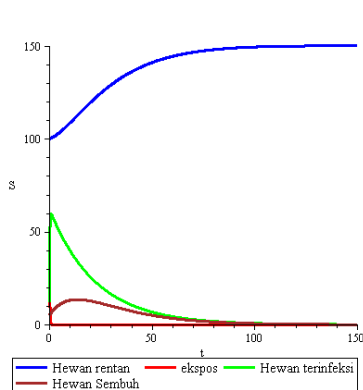
Tabel 3. Nilai awal Populasi Hewan

| Parameter | Nilai | Sumber |
|-----------|-------|--------------------------|
| S_h | 100 | Skripsi Ihwal Nur Kasmar |
| E_h | 50 | Skripsi Ihwal Nur Kasmar |
| i_h | 12 | Skripsi Ihwal Nur Kasmar |
| R_h | 5 | Dibangkitkan |

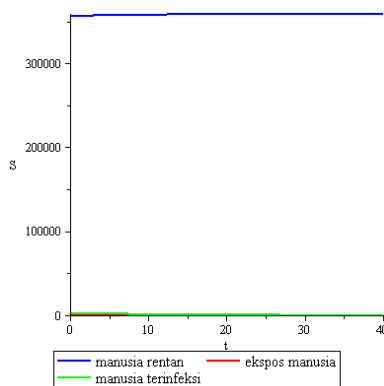
Tabel 4. Nilai awal Populasi Manusia

| Parameter | Nilai | Sumber |
|-----------|--------|-----------------------------|
| S_m | 356279 | Kota Palu Dalam Angka 2013 |
| E_m | 1361 | Dinkes Kota Palu Tahun 2013 |
| i_m | 1361 | Dinkes Kota Palu Tahun 2013 |

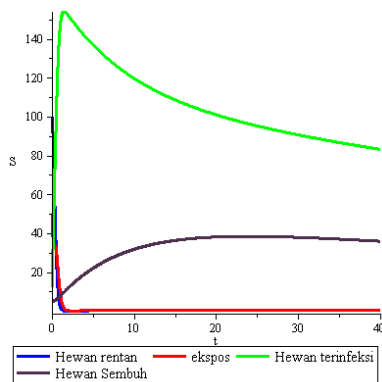
Dengan menggunakan *software* Maple 13, didapatkan kurva perkembangan penyakit Scabies pada populasi hewan dan populasi manusia dalam kurun waktu 150 hari kedepan sebagai berikut:



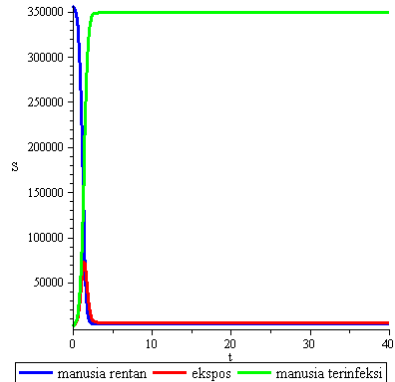
Gambar 3. Kurva bebas penyakit pada populasi



Gambar 4. Kurva bebas penyakit pada Populasi



Gambar 5. Kurva endemik penyakit pada populasi



Gambar 6. Kurva endemik penyakit pada populasi

3.10. Pembahasan

Sistem Persamaan differensial (1) – (4) dan (5) – (7) dapat diamati dalam keadaan setimbang atau biasa disebut dengan titik kesetimbangan atau titik kritis. Dengan mengamati sistem Persamaan differensial pada kondisi tidak terdapat perubahan dalam populasi didapatkan 4 titik kritis (T_0, T_1, T_2, T_3) dengan titik kritis T_0 dan T_1 pada populasi hewan dan titik kritis T_2 dan T_3 pada populasi manusia. Titik kritis T_0 dan T_2 menggambarkan populasi bebas penyakit dan titik kritis T_1 dan T_3 menggambarkan bahwa terdapat individu terinfeksi bersifat menetap dalam populasi, artinya penyakit tersebut endemik. Analisa kestabilan di titik kritis T_0 pada populasi hewan dengan menggunakan Routh Hurwitz menunjukkan bahwa sistem stabil yang ditunjukkan dengan $A > 0, B > 0, b_1 > 0, c_1 > 0,$ dan $d_1 > 0$. Pada titik kritis T_1 pada populasi hewan dengan menggunakan Routh Hurwitz menunjukkan bahwa sistem tidak stabil yang ditunjukkan $a_4 > 0, a_3 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0,$ dan $d_1 < 0$. Sedangkan pada populasi manusia dianalisa kestabilan di titik kritis T_2 dengan memperhatikan nilai eigen sistem, dimana sistem tidak stabil asimtotik karena λ_2 bernilai positif jika $Y_2 < \sqrt{X_2}$ dengan $\beta = \frac{\mu N_m (\mu + \epsilon) (\mu + \gamma)}{\epsilon \Psi}$ dan pada titik kritis T_3 sistem stabil asimtotik dimana λ_1, λ_2 dan λ_3 bernilai negatif jika $Y_3 > \sqrt{X_3}$.

Berdasarkan Gambar 3. populasi hewan rentan mengalami peningkatan hingga hari ke 120 dan stabil pada titik $S = 150$ dikarenakan penambahan jumlah populasi dari populasi hewan yang telah sembuh berpeluang terinfeksi kembali sehingga kembali menjadi populasi hewan rentan. Hal ini dikarenakan perpindahan populasi dari populasi hewan rentan ke populasi hewan ekspos. Populasi hewan ekspos mengalami penurunan hingga stabil pada hari ke 2 dikarenakan perpindahan populasi ke populasi hewan terinfeksi. Populasi hewan

terinfeksi mengalami peningkatan hingga mencapai titik $i = 60$ dikarenakan adanya penambahan jumlah populasi dari populasi ekspos dan kembali mengalami penurunan hingga menuju stabil di titik $i = 0$ pada hari ke 185, dikarenakan mengalami perpindahan jumlah populasi ke populasi hewan sembuh. Populasi hewan sembuh mengalami peningkatan pada hari ke 11 dititik $R = 13$ dikarenakan adanya penambahan jumlah populasi dari populasi hewan infeksi dan kemudian mengalami penurunan hingga stabil di titik $R = 0$ pada hari ke 261.

Berdasarkan Gambar 4. terlihat bahwa pada populasi manusia rentan mengalami peningkatan jumlah populasi hingga hari ke 65 dan stabil $S = 35900$ dikarenakan penambahan jumlah populasi dari populasi manusia terinfeksi. Pada populasi manusia ekspos terlihat bahwa populasi tersebut mengalami penurunan hingga menuju titik $E = 0$ dihari ke 2, dikarenakan terjadi penambahan populasi ke populasi hewan terinfeksi. Populasi manusia hewan terinfeksi mengalami peningkatan dihari ke 1 hingga mencapai titik $i = 2550$ yang dikarenakan penambahan populasi dari populasi manusia ekspos dan mengalami penurunan hingga stabil pada hari ke 70.

Berdasarkan Gambar 5. laju pertumbuhan populasi hewan rentan mengalami penurunan disetiap harinya hingga mencapai titik $S = 0.15$ dihari ke 2 dikarenakan adanya perpindahan populasi hewan rentan menjadi populasi ekspos. Laju pertumbuhan populasi ekspos berkurang hingga menuju titik $E = 0,2$ dihari ke 2 karena adanya perpindahan populasi ekspos menjadi populasi terinfeksi. Laju pertumbuhan populasi hewan terinfeksi mengalami peningkatan hingga mencapai titik $i = 154$ di hari ke 1, karena terjadi penambahan populasi dari populasi ekspos dan kemudian populasi hewan yang terinfeksi mengalami penurunan menuju titik $t = 0$ yang dipengaruhi oleh faktor kematian karena penyakit dan perpindahan populasi dari populasi hewan terinfeksi ke populasi hewan sembuh hingga menuju sebuah nilai stabil. Laju pertumbuhan populasi hewan sembuh mengalami peningkatan hingga hari ke 20 pada titik $R = 39$ yang dipengaruhi oleh faktor perpindahan populasi dari populasi hewan sembuh ke populasi hewan rentan dikarenakan jumlah populasi hewan yang terinfeksi semakin meningkat dan setelah itu mengalami penurunan hingga stabil titik $R = 1$ pada hari ke 900.

Berdasarkan gambar 6. laju populasi manusia rentan awalnya mengalami penurunan secara perlahan hingga hari ke 3 pada titik $S = 50000$. Berkurangnya populasi ini dikarenakan laju perpindahan populasi manusia rentan menjadi populasi manusia ekspos. Laju pertumbuhan populasi manusia ekspos mengalami peningkatan mencapai titik $E = 73000$ karena penambahan populasi dari populasi manusia rentan dan kembali menurun pada hari

ke 4 hingga menuju titik E = 51000 dan stabil pada titik tersebut, dikarenakan mengalami perpindahan ke populasi manusia terinfeksi. Populasi manusia terinfeksi mengalami peningkatan hingga mencapai titik i = 350000 dan stabil pada titik tersebut dikarenakan laju penambahan populasi, dari populasi manusia ekspos dan populasi manusia terinfeksi hingga menuju sebuah nilai stabil. Dari hasil simulasi penyakit scabies pada populasi hewan dan populasi manusia menyatakan bahwa jenis penyakit ini tidak terlalu berbahaya tetapi meresahkan penderitanya karena penyebarannya sangat cepat. Jika hal ini terus dibiarkan maka penyakit ini akan terus berkembang seiring bertambahnya waktu.

IV. KESIMPULAN

1. Model matematika penyakit Scabies pada populasi hewan dan manusia adalah sebagai berikut :

- a. Model Penyakit Scabies Pada Hewan

$$\frac{dS_h}{dt} = \chi - \frac{\delta i_h S_h}{N_h} - \mu S_h + \rho i_h$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \frac{\delta i_h S_h}{N_h} - \tau E_h - \mu E_h$$

$$\frac{di_h}{dt} = \tau E_h - \theta i_h - \nu i_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \theta i_h - \rho R_h - \mu R_h$$

- b. Model Penyakit Scabies Pada Manusia

$$\frac{dS_m}{dt} = \psi - \frac{\beta i_m S_m}{N_m} - \mu S_m + \gamma i_m$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\beta i_m S_m}{N_m} - \epsilon E_m - \mu E_m$$

$$\frac{di_m}{dt} = \epsilon E_m - \gamma i_m - \mu i_m$$

2. Titik kritis model matematika penyakit Scabies pada populasi hewan dan manusia adalah sebagai berikut :

- a. Titik kritis bebas penyakit pada populasi hewan

$$T_0 = \left(\frac{\chi}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$$

- b. Titik kritis endemik pada populasi hewan

$$T_1 = \left(\frac{N_h(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu)}{\delta\tau}, (\theta + \nu) \left(-\frac{N_h\mu(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu) - \chi\delta\tau(\rho + \mu)}{\delta(\rho + \mu)(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu)} \right), \right. \\ \left. \left(-\frac{N_h\mu(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu) - \chi\delta\tau(\rho + \mu)}{\delta(\rho + \mu)(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu)} \right), -\frac{\theta(N_h\mu(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu) - \chi\delta\tau)}{\delta(\rho + \mu)(\theta\tau + \nu\tau + \mu\theta + \mu\nu)} \right)$$

- c. Titik kritis bebas penyakit pada populasi manusia

$$T_2 = \left(\frac{\psi}{\mu}, 0, 0 \right)$$

- d. Titik kritis endemik pada populasi manusia

$$T_3 = \left(\frac{N_m(\gamma\epsilon + \mu\epsilon + \mu\gamma + \mu^2)}{\beta\epsilon}, (\mu + \gamma) \left(\frac{\psi\beta\epsilon - \mu N_m(\gamma\epsilon + \mu\epsilon + \mu\gamma + \mu^2)}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)\epsilon} \right), \frac{\psi\beta\epsilon - \mu N_m(\gamma\epsilon + \mu\epsilon + \mu\gamma + \mu^2)}{\beta\mu(\epsilon + \gamma + \mu)} \right)$$

3. Analisa kestabilan model matematika penyakit Scabies pada populasi hewan dan manusia pada titik kritis T_1, T_2 tidak stabil dan T_0, T_3 stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Dinkes kota Palu, 2013. Laporan Tahunan Hasil kegiatan Seksi Pelayanan Dasar, Rujukan dan Kesehatan Khusus Tahun 2013.
- [2]. Handoko R.P., 2010, Scabies, Dalam: Djuanda A., Hamzah M., and Aisah S. Ed, Ilmu Penyakit Kulit dan Kelamin Edisi 6, Fakultas Kedokteran Universitas Indonesia, Jakarta.
- [3]. Heukelbach J, & Feldmeier H. (2006). Scabies. *Lancet* 367, 1767-1774.
- [4]. Murtiastutik, D., 2008, Scabies, Dalam: Barakbah J., Lumintang H., and Martodiharjo S. Ed, Buku Ajar Infeksi Menular Seksual, Airlangga University Press, Surabaya.