

Menentukan Solusi Numerik Model Dinamik Suhu dan Tekanan Udara di Atmosfer Dengan Metode Runge Kutta Orde Empat

R. Febrianti¹, R. Ratianingsih², A. I. Jaya³

^{1,2,3}Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako,

Jalan sukarno-Hatta Palu,

¹Rati_Febrianti@yahoo.co.id, ²ratianingsih@yahoo.com

Abstrak

Perubahan iklim sebagai implikasi pemanasan global, telah mengakibatkan ketidakstabilan atmosfer dilapisan bawah terutama yang dekat dengan Permukaan Bumi. Suhu dan tekanan udara merupakan unsur iklim yang utama. Hubungan antara suhu dan tekanan udara yang merupakan unsur utama iklim akan dikaji dalam penelitian ini. Hal ini dilakukan dengan menentukan solusi numerik model dinamik suhu dan tekanan udara di setiap waktu melalui metode Runge Kutta Orde 4. Metode tersebut merupakan metode untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa dengan ketelitian dan kestabilan yang cukup tinggi. Melalui metode tersebut solusi numerik yang mempresentasikan suhu (T) dan tekanan udara di atmosfer (P) diperoleh melalui sistem persamaan differensial biasa sebagai berikut:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q[2,36.PQ+36,775-TQ]}{36,775[36,775-0,5428-Q]}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{Q[0,23-PQ]}{36,775-0,5428-Q}$$

Metode Runge Kutta Orde 4 memberikan solusi numerik yang sangat dekat dengan solusi analitiknya dengan galat relatif di bawah 1% untuk $Q_1 = 36.2$ dan dengan galat relatif di bawah 0.03% untuk $Q_2 = 37$. Grafik suhu dan tekanan udara di atmosfer memenuhi persamaan gas ideal bila nilai parameter laju perubahan kalor (Q) di atmosfer dipilih pada daerah kestabilan dengan syarat $36,2322 > Q$.

Kata kunci : Galat Relatif, Metode Runge Kutta Orde Empat, Solusi Analitik, Solusi Numerik.

I. Pendahuluan

Pemanasan Global (*Global Warming*) adalah kejadian meningkatnya temperatur rata-rata atmosfer, laut dan daratan Bumi. Penyebab utama pemanasan ini adalah pembakaran bahan bakar fosil, seperti batu bara, minyak Bumi dan gas alam yang melepaskan karbondioksida dan gas-gas lainnya yang dikenal sebagai gas rumah kaca ke atmosfer. Ketika atmosfer semakin kaya akan gas-gas rumah kaca ini, ia semakin menjadi isolator yang menahan lebih banyak panas dari matahari yang dipancarkan ke bumi (Darsono, 1993). Hal ini berdampak besar terhadap Perubahan Iklim.

Perubahan Iklim sebagai implikasi pemanasan global, telah mengakibatkan ketidakstabilan atmosfer dilapisan bawah terutama yang dekat dengan Permukaan Bumi. Perubahan iklim disebabkan oleh kenaikan gas-gas rumah kaca terutama karbondioksida. Unsur-unsur iklim meliputi suhu, tekanan udara, kelembapan udara, keadaan awan dan curah hujan. Suhu dan tekanan udara merupakan unsur iklim yang utama, sedangkan unsur-unsur yang lainnya diturunkan dari kedua unsur tersebut.

Hubungan antara suhu dan tekanan udara yang merupakan unsur utama iklim akan dikaji dalam penelitian ini. Hal ini dilakukan dengan menentukan solusi numerik model dinamik suhu dan tekanan udara di setiap waktu melalui metode Runge Kutta Orde 4. Metode tersebut merupakan metode untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa dengan ketelitian dan kestabilan yang cukup tinggi. Metode ini sangat umum digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa, baik linear maupun nonlinear untuk kondisi awal. Hubungan antara suhu dan tekanan udara di atmosfer diperoleh dengan menggambarkan grafik suhu terhadap tekanan udara.

II. Metode Penelitian

Penelitian dilakukan sesuai prosedur di bawah ini:

- a. Melakukan tinjauan pustaka.
- b. Mengkaji model dinamik suhu dan tekanan udara di atmosfer dengan metode Runge Kutta Orde 4.
- c. Substitusi nilai parameter c_p , α , K ke model suhu dan tekanan udara di atmosfer.
- d. Menentukan solusi model untuk mencari beberapa nilai Q.
- e. Menghitung galat relatif
- f. Menentukan Grafik antara Suhu dan Tekanan.
- g. Menyimpulkan hasil penelitian.

III. Tinjauan Pustaka

3.1. Cuaca dan Iklim

Cuaca adalah keadaan atmosfer disuatu tempat atau wilayah selama kurun waktu yang pendek yang dinyatakan dengan berbagai parameter suhu, tekanan, angin, kelembapan dan berbagai fenomena hujan. Cuaca terjadi karena suhu dan kelembapan yang berbeda antara satu tempat dengan tempat lainnya. Sedangkan iklim merupakan keadaan rata-rata cuaca pada suatu wilayah yang relatif luas dan waktu yang relatif lama (puluhan tahun). Perubahan temperatur atmosfer menyebabkan kondisi fisis atmosfer kian tak stabil dan menimbulkan terjadinya anomali-anomali terhadap parameter cuaca yang berlangsung lama. Dalam jangka panjang anomali-anomali parameter cuaca tersebut akan menyebabkan terjadinya perubahan iklim (Susandi, dkk.,2008).

Cuaca sangat berpengaruh pada iklim dan perubahan iklim. perubahan iklim yang sangat ekstrim dapat mengakibatkan pemanasan global.

3.2. Unsur- unsur cuaca dan iklim

Unsur-unsur cuaca dan iklim meliputi suhu, tekanan udara, kelembapan udara, keadaan awan, dan curah hujan. Unsur iklim yang dikaji dalam penelitian ini adalah suhu dan tekanan.

3.2.1. Suhu

Suhu menunjukkan derajat panas benda. Mudahnya, semakin tinggi suhu suatu benda, semakin panas benda tersebut. Suhu dapat dikatakan sebagai ukuran relatif dari kondisi termal yang dimiliki suatu benda. Jika dua benda yang bersinggungan dan tidak terjadi perpindahan panas antara kedua benda tersebut, maka kedua benda ini berada pada kondisi setara termal (*thermal equilibrium*).

3.1.2. Tekanan

Tekanan udara adalah tenaga yang bekerja untuk menggerakkan massa udara dalam setiap satuan luas tertentu. Diukur dengan menggunakan barometer. Satuan tekanan udara adalah milibar (mb). Dan juga Tekanan udara merupakan tingkat kebasahan udara karena dalam udara air selalu terkandung dalam bentuk uap air. Faktor-faktor yang memengaruhi tekanan udara adalah tinggi rendahnya tempat dan temperatur.

3.3. Hubungan antara Suhu dan Tekanan yang Berkaitan dengan Sistem Persamaan Differensial (SPD)

Suhu yang paling tinggi berada di permukaan. Semakin dalam suatu wilayah perairan maka tekanan menuju dasar akan semakin besar. Hal ini mengakibatkan suhu semakin turun. Hubungan suhu dan tekanan tampak pada peristiwa El Nino dan La Nina. El Nino merupakan peristiwa naiknya suhu permukaan laut (*warm phase*) sedangkan La Nina mempunyai kondisi yang sebaliknya yaitu turunnya suhu permukaan air laut (*cold phase*) pada area khatulistiwa Samudra Pasifik. Bagian barat Samudra Pasifik tekanan udara meningkat sehingga menyebabkan terhambatnya pertumbuhan awan di atas lautan bagian timur Indonesia, sehingga di beberapa wilayah Indonesia terjadi penurunan curah hujan yang jauh dari normal. Suhu permukaan laut di Pasifik tengah dan timur menjadi lebih tinggi dari biasa pada waktu-waktu tertentu, walaupun tidak selalu. Keadaan inilah yang menyebabkan terjadinya fenomena La-Nina . Tekanan udara di kawasan equator Pasifik barat menurun, lebih ke barat dari keadaan normal, menyebabkan pembentukan awan yang lebih dan hujan lebat di daerah sekitarnya.

3.4. Hubungan antara Suhu dan Tekanan yang Berkaitan dengan Sistem Persamaan Differensial (SPD)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \dots\dots\dots (1)$$

dengan:

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3) \dots\dots\dots (2)$$

3.5. Analisis Galat Relatif

Solusi yang diperoleh secara numerik merupakan nilai hampiran dari solusi eksaknya. Ini berarti terdapat galat (*error*) pada solusi hampiran tersebut. Galat numerik adalah besaran yang merupakan selisih antara nilai hampiran dengan nilai eksak. Hubungan ini dirumuskan menjadi :

$$E_a = x - \bar{x} \dots\dots\dots (3)$$

dimana E_a adalah galat absolut (galat mutlak), x nilai eksak, dan \bar{x} nilai hampiran. Jika tanda galat (positif atau negatif) tidak dipertimbangkan, maka galat mutlak dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$e_x = \frac{\text{galat absolut}}{\text{nilai eksak}} = \frac{E_a}{x} \dots\dots\dots (4)$$

Selanjutnya galat absolut dinyatakan dengan E , dan galat relatif dinyatakan dengan e .

IV. Hasil dan Pembahasan

4.1. Melakukan Substitusi Nilai parameter c_p, α, K ke SPD (T, P)

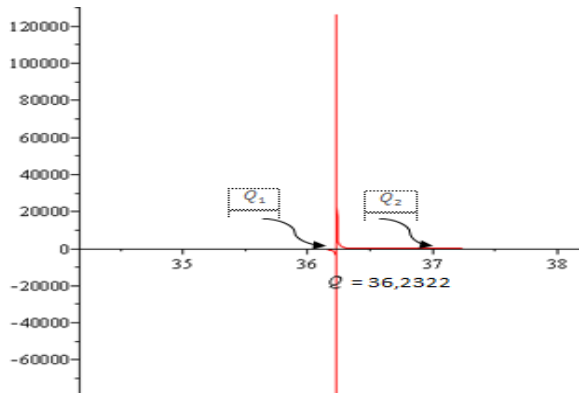
$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q[2,36.PQ+36,775-TQ]}{36,775[36,775-0,5428-Q]} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{Q[0,23-PQ]}{36,775-0,5428-Q} \dots\dots\dots (6)$$

4.2. Penentuan Solusi Model untuk Nilai Q yang Bergerak dalam T dan P dengan Metode Runge Kutta Orde Empat

$$f_1(Q) = \lambda_1 = -\frac{Q^2}{c_p(c_p - K\alpha - Q)} = -\frac{0.02719238613Q}{36.2322 - Q} \dots\dots\dots (7)$$

$$f_2(Q) = \lambda_2 = -\frac{Q^2}{c_p - K\alpha - Q} = -\frac{Q}{36.2322 - Q} \dots\dots\dots (8)$$



Gambar 1: Kurva Nilai Eigen terhadap parameter Q .

4.3. Penentuan Solusi Model untuk Nilai Q yang Bergerak dalam T dan P dengan Metode Runge Kutta Orde Empat.

4.3.1. Untuk $Q_1 = 36,2$

Tabel 1 : Suhu dan Tekanan udara di atmosfer untuk $Q_1 = 36,2$

i	Waktu (t_i)	Suhu (\hat{T}_i)	Tekanan (\hat{P}_i)
0	0	1	0.9346
1	$2 \cdot 10^{-8}$	1.000049149	0.9338447086
2	$4 \cdot 10^{-8}$	1.000098257	0.9330900956
3	$6 \cdot 10^{-8}$	1.000147325	0.9323360966
4	$8 \cdot 10^{-8}$	1.000147284	0.9315827110
5	$10 \cdot 10^{-8}$	1.000196272	0.9315739141
6	$12 \cdot 10^{-8}$	1.000245259	0.9308211486
7	$14 \cdot 10^{-8}$	1.000294205	0.9300689956
8	$16 \cdot 10^{-8}$	1.000343111	0.9293174545

4.3.2. Untuk $Q_2 = 37$

Tabel 2 : Suhu dan Tekanan udara di atmosfer untuk $Q_2 = 37$

i	Waktu (t_i)	Suhu (\hat{T}_i)	Tekanan (\hat{P}_i)
0	0	1	0.9346
1	$2 \cdot 10^{-8}$	0.9999978671	0.9346331071

2	$4 \cdot 10^{-8}$	0.9999957341	0.9346662153
3	$6 \cdot 10^{-8}$	0.9999936010	0.9346993247
4	$8 \cdot 10^{-8}$	0.9999914678	0.9347324353
5	$10 \cdot 10^{-8}$	0.9999893345	0.9347552209
6	$12 \cdot 10^{-8}$	0.9999871514	0.9347891087
7	$14 \cdot 10^{-8}$	0.9999850180	0.9348222225

Tabel 3 : Solusi Analitik Suhu dan Tekanan Udara Sebenarnya untuk $Q_1 = 36,2$

i	Waktu (t_i)	Suhu (\hat{T}_i)	Tekanan (\hat{P}_i)
0	0	1	0.9346
1	$2 \cdot 10^{-8}$	0.9999999356	0.9345999999
2	$4 \cdot 10^{-8}$	0.9999998711	0.9345999997
3	$6 \cdot 10^{-8}$	0.9999998067	0.9345999996
4	$8 \cdot 10^{-8}$	0.9999997423	0.9345999995
5	$10 \cdot 10^{-8}$	0.9999996778	0.9345999994
6	$12 \cdot 10^{-8}$	0.9999996134	0.9345999993
7	$14 \cdot 10^{-8}$	0.9999995490	0.9345999992
8	$16 \cdot 10^{-8}$	0.9999994846	0.9345999991

Tabel 4 : Solusi Analitik Suhu dan Tekanan Udara Sebenarnya untuk $Q_2 = 37$

i	Waktu (t_i)	Suhu (\hat{T}_i)	Tekanan (\hat{P}_i)
0	0	1	0.9346
1	$2 \cdot 10^{-8}$	0.9999999329	0.9345999999
2	$4 \cdot 10^{-8}$	0.9999998658	0.9345999998

3	$6 \cdot 10^{-8}$	0.9999997988	0.9345999996
4	$8 \cdot 10^{-8}$	0.9999997317	0.9345999995
5	$10 \cdot 10^{-8}$	0.9999996646	0.9345999994
6	$12 \cdot 10^{-8}$	0.9999995975	0.9345999993
7	$14 \cdot 10^{-8}$	0.9999995305	0.9345999992
8	$16 \cdot 10^{-8}$	0.9999994634	0.9345999991

4.4. Analisis Galat Relatif Suhu dan Tekanan Udara di Atmosfer (Selisih Antara Solusi Numerik dan Solusi Analitik).

Tabel 5 : Galat Relatif model dinamik suhu dan tekanan udara di atmosfer untuk $Q_1 = 36,2$

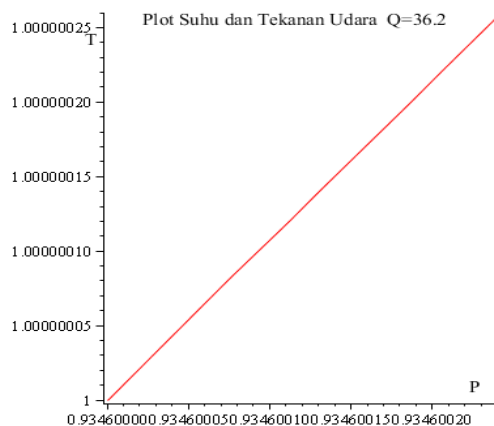
i	Waktu (t_i)	Galat Relatif Suhu $\left(\frac{T_i - \hat{T}_i}{T_i}\right)$	Galat Relatif Tekanan $\left(\frac{P_i - \hat{P}_i}{P_i}\right)$
0	0	0	0
1	$2 \cdot 10^{-8}$	0.0004916189634	0.0008081439122
2	$4 \cdot 10^{-8}$	0.00009838591268	0.001615561738
3	$6 \cdot 10^{-8}$	0.0001475183285	0.002422322920
4	$8 \cdot 10^{-8}$	0.0001475417380	0.003228427671
5	$10 \cdot 10^{-8}$	0.0001965942633	0.003237840040
6	$12 \cdot 10^{-8}$	0.0002456456950	0.004043281299
7	$14 \cdot 10^{-8}$	0.0002946561329	0.004848067197
8	$16 \cdot 10^{-8}$	0.0003436255771	0.005652198381

Tabel 6: Galat Relatif model dinamik suhu dan tekanan udara di atmosfer untuk $\square Q_2 = 37$

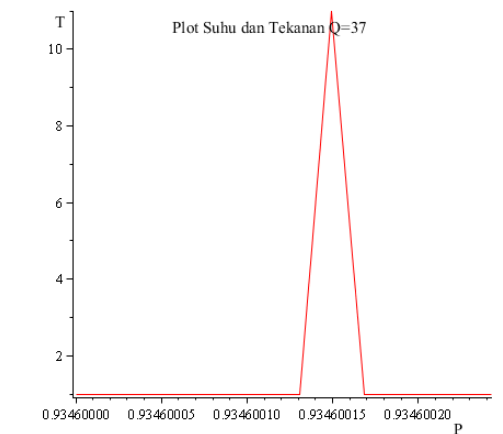
i	Waktu (t_i)	Galat Relatif Suhu $\left(\frac{T_i - \hat{T}_i}{T_i}\right)$	Galat Relatif Tekanan $\left(\frac{P_i - \hat{P}_i}{P_i}\right)$
0	0	0	0
1	$2 \cdot 10^{-8}$	0.000002065800138	0.00003542392468
2	$4 \cdot 10^{-8}$	0.000004131700554	0.00007084902634
3	$6 \cdot 10^{-8}$	0.000006197801247	0.0001062755190
4	$8 \cdot 10^{-8}$	0.000008263902217	0.0001417031886
5	$10 \cdot 10^{-8}$	0.00001033010346	0.0001660833513

6	$12 \cdot 10^{-8}$	0.00001244610501	0.0002023426066
7	$14 \cdot 10^{-8}$	0.00001451250681	0.0002377737002
8	$16 \cdot 10^{-8}$	0.00001657890890	0.0002732060777

4.5. Grafik Suhu dan Tekanan Udara di Atmosfer.



Gambar 2 : Solusi Numerik Suhu dan Tekanan Udara di Atmosfer untuk $Q_1 = 36,2$



Gambar 3 : Solusi Numerik Suhu dan Tekanan Udara di Atmosfer untuk $Q_2 = 37$

V. Penutup

5.1. Kesimpulan

- Secara umum solusi numerik model dinamik suhu dan tekanan udara di atmosfer dengan Runge Kutta Orde Empat (setiap iterasi) berbentuk:

$$T_i T_i = T_0 + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$P_i = P_0 + \frac{1}{6} [l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4]$$

$$t_i = t_i + h$$

dengan :

$$k_1 = hf(T_0, P_0, t_0)$$

$$l_1 = hg(T_0, P_0, t_0)$$

$$k_2 = hf\left(T_0 + \frac{1}{2}k_1, P_0 + \frac{1}{2}l_1, t_0 + \frac{1}{2}h\right)$$

$$l_2 = hg\left(T_0 + \frac{1}{2}k_1, P_0 + \frac{1}{2}l_1, t_0 + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_3 = hf\left(T_0 + \frac{1}{2}k_2, P_0 + \frac{1}{2}l_2, t_0 + \frac{1}{2}h\right)$$

$$l_3 = hg\left(T_0 + \frac{1}{2}k_2, P_0 + \frac{1}{2}l_2, t_0 + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_4 = hf(T_0 + k_3, P_0 + l_3, t_0 + h)$$

$$l_4 = hg(T_0 + k_3, P_0 + l_3, t_0 + h)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{36.2[2,36,36,2P(t)+36,775-36.2T(t)]}{36,775[36,775-0,5428-36.2]} = f(T, P, t)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{36,2[0,23-36,2P(t)]}{36,775-0,5428-36.2} = g(T, P, t)$$

2. Grafik suhu dan tekanan udara di atmosfer memenuhi hukum persamaan gas ideal bila nilai parameter laju pelepasan kalor (Q) di atmosfer dipilih pada daerah kestabilan. Grafik ini tidak bisa dipertahankan bila dipilih di luar daerah kestabilannya yaitu $36,2322 > Q$.

5.2. Saran

Penulis mengharapkan agar ada penelitian lanjut tentang model dinamik suhu dan tekanan udara di atmosfer dengan menggunakan metode numerik lain selain metode Runge Kutta Orde Empat.

Daftar Pustaka

- [1]. Darsono, Valentino. *Pengantar 1/mu Lingkungan*. Edisi revisi. Yogyakarta: Jhamtani, H. 1993. Pemanasan Global. Yayasan Obor Indonesia, Kophalindo, Panos. Jakarta.
- [2]. Susandi, dkk. 2008. *Pengaruh cuaca dan iklim*. <http://www.PengaruhCuacaDanIklim.html>, diakses pada tanggal 16 April 2013.