JIMT
Vol. 10 No. 1 Juni 2013 (Hal. 83 – 88)

JIMT
Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan
ISSN : 2450 – 766X

TRANSFORMASI FOURIER QUATERNION

Resnawati

Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako
Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia.
Email : r35n4w4t1@yahoo.com

Abstrak

Perluasan Transformasi Fourier (TF) ke bidang aljabar quaternion saat ini semakin berkembang. Transformasi fourier quaternion (TFQ) memiliki aplikasi penting dalam berbagai bidang, khususnya dalam bidang pengolahan citra. Sifat quaternion yang tidak komutatif terhadap perkalian menghasilkan tiga tipe dari TFQ. Tulisan ini akan menjelaskan TFQsatu sisibeberapa sifat penting termasuk konvolusinya.

I. PENDAHULUAN

Transformasi Fourier (TF) memiliki beberapa cabang penting yang telah banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang. Salah satu diantaranya adalah transformasi fourier diskrit (TFD). TFD merupakan transformasi fourier pada domain diskrit. Bracewell (2000) dalam Sangwine dan Ell (2012) menyatakan bahwa diantara kegunaan TFD adalah dalam pengolahan signal dan citra serta bidang lainnya.

Bidang transformasi fourier (TF) saat ini telah mengalami perkembangan ke bidang aljabar quaternion yang dikenal dengan transformasi fourier quaternion (TFQ). Hitzer (2006) menyatakan bahwa TFQ aplikasi yang penting dalam persamaan differensial parsial, pengolahan citra dan implementasi optimasi secara numerik. Pada pengolahan data citra khususnya, Pei dkk (2001) menyatakan bahwa TFQ berperan dalam perbaikan citra, deteksi tepi dan kompresi citra.

Quaternion sendiri merupakan perluasan bilangan-bilangan kompleks untuk aljabar empat dimensi dengan satu bagian real dan tiga bagian imajiner. Quaternion merupakan aljabar non komutatif namun memenuhi syarat asosiatif.Tulisan ini akan menunjukkan definisi TFQ satu sisi, beberapa sifat penting serta konvolusinya.

II. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian bersifat kualitatif dengan melakukan kajian pustaka melalui pengumpulan dan mengkaji materi-materi yang berkaitan dengan penelitian seperti quaternion dan TF. Selanjutnya dari materi tersebut, dilakukan penyusunan definisi dan teorema TFQ satu sisi.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Aljabar Quaternion $\mathbb{H}$

Quaternion merupakan perluasan bilangan-bilangan kompleks untuk aljabar empat dimensi yang awalnya berasal dari ketidak berhasilan perluasan bilangan kompleks untuk aljabar dimensi tiga (Triplets) karena operasi perkaliannya tidak bersifat tertutup berdasarkan elemen-elemen $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. (Mawardi dkk, 2007)

a. Definisi Quaternion

Quaternion merupakan kombinasi linier skalar real dan tiga satuan imajiner orthogonal (dilambangkan ***i, j*** dan ***k***) dengan koefisien-koefisien real, yang dituliskan sebagai

$H=\{q=q_0+ iq_1+ jq_2+kq_3\}$, q_0, q_1, q_2.. (1)

dimana elemen-elemen ***i***, ***j*** dan ***k*** memenuhi sifat perkalian Hamiltonian sebagai berikut :

$i^2=j^2=k^2= -1$, $ij= -ji=k$, $jk= -kj=i$, $ki= -ik=j$ .... (2)

Quaternion ini dapat kita tuliskan secara sederhana sebagai penjumlahan skalar q_0 dan quaternion 3D murni $\boldsymbol{q}$,yaitu

$q= q_0+ \boldsymbol{q}= q_0+ iq_1+jq_2+ kq_3$ .... (3)

dimana q_0 adalah bagian skalar dan dilambangkan dengan $q_0 = Sc(q)$ dan $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ dinamakan sebagai bagian vektor. Konjugat quaternion q diperoleh dengan mengganti tanda bagian vektor, yaitu

$\bar{q}=q_0-\boldsymbol{q}=q_0-iq_1-jq_2-kq_3$... (4)

b. Sifat-sifat Bilangan Quaternion

Misalkan diberikan quaternion $, q, \bar{p}, \bar{q}$, maka berikut adalah sifat-sifat bilangan quaternion :

i) $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$

ii) $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$ (sifat anti involusi)

iii) $q\bar{q} = \bar{q}p$ (sifat assosiatif)

iv) $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$

v) $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$. (Invers $q \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$

3.2. Transformasi Fourier (TF)

Definisi dan sifat-sifat TF pada bagian ini merujuk pada Mawardi dkk. (2013) yang dinyatakan sebagai berikut.

a. Definisi Transformasi Fourier

Misalkan f adalah sebuah fungsi yang terletak di $L^1(\mathbb{R})$. Transformasi fourier dari f dinyatakan sebagai

$$\mathscr{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (5)$$

sedangkan invers dari $\hat{f}(\omega)$ dinyatakan sebagai

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}\{f\}](x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (6)$$

b. Sifat-Sifat Transformasi Fourier

Sifat-sifat dasar bagi TF ditunjukkan sebagai berikut.

- Linearitas

  Jika dua buah fungsi $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dan α, β adalah sebarang konstanta, maka :

  $$\mathscr{F}\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha \mathscr{F}\{f\}(\omega) \mathscr{F}\{g\}(\omega) + \beta \quad (7)$$

- Pergeseran

  Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, pergeseran f didefinisikan oleh $\tau_k f(x) = f(x-k)$, maka :

  $$\mathscr{F}\{\tau_k f\}(\omega) = e^{-i\omega k} \mathscr{F}\{f\}(\omega) \quad (8)$$

- Modulasi

  Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Modulasi f didefinisikan oleh $\mathbb{M}_{\omega_0} f(x) = e^{i\omega_0 x} f(x)$, transformasi fourier dari modulasi f didefinisikan oleh :

  $$\mathscr{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \mathscr{F}\{f\}(\omega - \omega_0) \quad (9)$$

- Pergeseran frekuensi-waktu

  Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. TF dari pergeseran ini berbentuk

  $$\mathscr{F}\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_{\omega_0} f\}(\omega) = e^{-i\omega_0 x} f(\omega - \omega_0) \quad (10)$$

3.3. Transformasi Fourier Quaternion (TFQ) satu sisi

Bagian ini akan dijelaskan definisi TFQ satu sisi serta sifat-sifat dasar yang penting bagi TFQ, dimana $f(x) = f_0(x) + \boldsymbol{i} f_1(x) + \boldsymbol{j} f_2(x) + \boldsymbol{k} f_3(x)$ adalah fungsi bernilai quaternion.

a. TFQ satu sisi

Definisi :

Misalkan f suatu fungsi bernilai quaternion, dan $\mu^2 = -1$. TFQ satu sisi pada $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{H})$, adalah fungsi $\mathscr{F}_q\{f\}: \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ yang diberikan oleh :

$$\mathscr{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \widehat{f}_q(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}} f\,(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} dx \quad (11)$$

dimana $x = xe,\ \omega = \omega e,$ dan eksponensial quaternion $e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x}$ adalah kernel Fourier quaternion yang dapat diubah menjadi :

$$e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} = \cos \omega x - \boldsymbol{\mu} \sin \omega x \quad (12)$$

Berdasarkan bentuk Euler pada perkalian eksponensial quaternion di atas, maka persamaan (11) dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathscr{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f\,(\boldsymbol{x})(\cos \omega x - \boldsymbol{\mu} \sin \omega x) \quad (13)$$

Teorema 1 (Invers TFQ satu sisi)

Berdasarkan definisi TFQ satu sisi, maka diperoleh invers untuk TFQ satu sisi adalah sebagai berikut

$$\mathscr{F}_q^{-1}\left[\mathscr{F}_q\{f\}\right](\boldsymbol{x}) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}_q\{f\}(\omega) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} d\omega \quad (14)$$

Selanjutnya kita akan menunjukkan empat sifat dasar dari TFQ satu sisi.

Teorema 2 (Linearitas)

Misalkan fungsi $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dan α, β adalah sebarang konstanta, maka

$$\mathscr{F}_q\{\alpha f + \beta g\}(\omega) = \alpha \mathscr{F}_q\{f\}(\omega) + \beta \mathscr{F}_q\{g\}(\omega) \quad (15)$$

Bukti.

Berdasarkan definisi TFQ satu sisi, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_q\{\alpha f + \beta g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} dx + \int_{\mathbb{R}} \beta g(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} dx \\ &= \alpha \mathscr{F}_q\{f\}(\omega) + \beta \mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\end{aligned}$$

dengan demikian teorema 2 terbukti.

Teorema 3 (Pergeseran)

Misalkan fungsi $f \in L^1(\mathbb{R})$, pergeseran f didefinisikan oleh $\tau_k f(x) = f(x-k)$, maka pergeseran TFQ satu sisi didefinisikan oleh

$$\mathscr{F}_q\{\tau_k f(x)\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{f\}(\omega) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega k} \quad (16)$$

Bukti.

$$\mathscr{F}_q\{\tau_k f(x)\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x-k)\, e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} dx$$

Misalkan $t = x - k$, maka persamaan di atas menjadi

$$\mathscr{F}_q\{\tau_k f(x)\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\boldsymbol{t})\, e^{-\boldsymbol{\mu}\omega(t+k)} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(\boldsymbol{t})\, e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} e^{-\boldsymbol{\mu}\omega k} dx$$
$$= \mathscr{F}_q\{f\}(\omega) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega k}.$$

dengan demikian teroema 3 terbukti.

Teorema 4 (modulasi)

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$, dan $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Modulasi f didefinisikan oleh $\mathbb{M}_{\omega_0} f(x) = f(x) e^{\boldsymbol{\mu}\omega_0 x}$, transformasi fourier dari modulasi f didefinisikan oleh

$\mathscr{F}_q\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{f\}(\omega - \omega_0)$ .... (17)

Bukti.

Dari definisi TFQ satu sisi diperoleh

$$\mathscr{F}_q\{\mathbb{M}_{\omega_0} f\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{f(x) e^{\boldsymbol{\mu}\omega_0 x}\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f\,(x) e^{\boldsymbol{\mu}\omega_0 x} e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f\,(x) e^{-\boldsymbol{\mu}(\omega - \omega_0)x} dx$$
$$= \mathscr{F}_q\{f\}(\omega - \omega_0).$$

dengan demikian, teorema modulasi fungsi quaternion terbukti.

Teorema 5 (Pergeseran frekuensi-waktu)

Misalkan $f \in L^1(\mathbb{R})$. Jika komposisi translasi dan modulasi fungsi f didefinisikan sebagai $\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f(x) = f(x - x_0) e^{\boldsymbol{\mu}\omega_0 x}$, maka TFQ satu sisi berbentuk

$\mathscr{F}_q\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{f\}(\omega - \omega_0) e^{\boldsymbol{\mu}(\omega - \omega_0)x_0}$ .... (18)

Bukti.

$$\mathscr{F}_q\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{f(x - x_0) e^{\boldsymbol{\mu}\omega_0 x}\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f\,(x - x_0) e^{\boldsymbol{\mu}\omega_0 x} e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x} dx$$

Misalkan $t = x - x_0$, maka

$$\mathscr{F}_q\{\mathbb{M}_{\omega_0} \tau_k f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f\,(t) e^{\boldsymbol{\mu}\omega_0 (t + x_0)} e^{-\boldsymbol{\mu}\omega (t + x_0)} dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f\,(t) e^{-\boldsymbol{\mu}(\omega - \omega_0)t} e^{\boldsymbol{\mu}(\omega - \omega_0)x_0} dx$$
$$= \mathscr{F}_q\{f\}(\omega - \omega_0) e^{\boldsymbol{\mu}(\omega - \omega_0)x_0}.$$

b. Teorema Konvolusi pada TFQ satu sisi

Di antara sifat penting dalam TFQ adalah konvolusi dan korelasi. Pada bagian ini akan ditunjukkan definisi konvolusi dan korelasi untuk TFQ satu sisi serta konjugatnya.

Definisi

Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Konvolusi f dan g, yang dinotasikan dengan $f \star g$ didefinisikan sebagai

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$

Teorema 6 (Konvolusi TFQ satu sisi)

Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ adalah dua fungsi bernilai quaternion. TFQ satu sisi dari konvolusi f, g dinyatakan oleh

$$\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_0(x-t)\}(\omega) + \boldsymbol{i}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_1(x-t)\}(\omega) + \boldsymbol{j}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_2(x-t)\}(\omega)\boldsymbol{k}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_3(x-t)\}(\omega) \quad \text{.........(19)}$$

Bukti.

Misalkan $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. TFQ satu sisi dari konvolusi f, g dinyatakan oleh

$$\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)e^{-\boldsymbol{\mu}\omega x}dxdt$$

Misalkan $y = x - t$, maka

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(y)e^{-\boldsymbol{\mu}\omega(y+t)}dydt \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(y)e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t}e^{-\boldsymbol{\mu}\omega y}dydt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-\boldsymbol{\mu}\omega y}dy\, e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t}dt.\end{aligned}$$

Mengingat sifat nonkomutatif terhadap perkalian pada quaternion, maka fungsi $f(t)$ akan didekomposisi menjadi $f(t) = f_0(t) + \boldsymbol{i}f_1(t) + \boldsymbol{j}f_2(t) + \boldsymbol{k}f_3(t)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \big(f_0(t) + \boldsymbol{i}f_1(t) + \boldsymbol{j}f_2(t) + \boldsymbol{k}f_3(t)\big)\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f_0(t)\mathscr{F}_q\{g\}(\omega) + \boldsymbol{i}f_1(t)\mathscr{F}_q\{g\}(\omega) + \boldsymbol{j}f_2(t)\mathscr{F}_q\{g\}(\omega) \\ &\quad +\boldsymbol{k}f_3(t)\mathscr{F}_q\{g\}(\omega))e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t}dt \quad \text{.. (20)}\end{aligned}$$

Karena f_0, f_1, f_2, f_3 adalah fungsi bernilai riil dengan variabel t, maka persamaan (20) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \big(&\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)f_0(t) + \boldsymbol{i}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)f_1(t) + \boldsymbol{j}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)f_2(t) \\ &+\boldsymbol{k}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)f_3(t)\big) \times e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t}dt \quad \text{..(21)}\end{aligned}$$

Persamaan (21) dapat disederhanakan menjadi

$$\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{g\}(\omega) \int_{\mathbb{R}} f_0(t) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t} dt + \boldsymbol{i}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega) \int_{\mathbb{R}} f_1(t) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t} dt$$

$$+\boldsymbol{j}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega) \int_{\mathbb{R}} f_2(t) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t} dt + \boldsymbol{k}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega) \int_{\mathbb{R}} f_3(t) e^{-\boldsymbol{\mu}\omega t} dt \text{ ...... } (22)$$

Berdasarkan definisi TFQ satu sisi, maka persamaan (22) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_0\}(\omega) + \boldsymbol{i}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_1\}(\omega) + \boldsymbol{j}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_2\}(\omega)$$

$$\boldsymbol{k}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_3\}(\omega) \text{ .... } (23)$$

Karena $y = x - t$, maka sebagai bentuk akhir $\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega)$, substitusi nilai y, diperoleh

$$\mathscr{F}_q\{f \star g\}(\omega) = \mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_0(x-t)\}(\omega) + \boldsymbol{i}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_1(x-t)\}(\omega)$$

$$+\boldsymbol{j}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_2(x-t)\}(\omega)\boldsymbol{k}\mathscr{F}_q\{g\}(\omega)\mathscr{F}_q\{f_3(x-t)\}(\omega) \text{ ...... } (24)$$

dengan demikian teorema 6 terbukti.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, penelitian ini memperoleh rumusan definisi TFQ satu sisi serta teorema terkait sifat linearitas, pergeseran, modulasi dan pergeseran waktu-frekuensi. Definisi konvolusi serta TFQ satu sisi bagi konvolusinya juga diperoleh.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Hitzer, E.M.S. 2007. Quaternion Fourier Transform on Quaternion Fields and Generalizations : *Proceeding of Functions Theories in Higher Dimensions*.

[2] M. Bahri, Asahino R. 2011. Two Dimensional Quaternionic Windowed Fourier Transform, - *Approach to Scientific Principles, Prof. Goran Nikolic (Ed.).* ISBN: 978-953-307-231-9.

[3] M. Bahri, Surahman. 2012. *Fast Quaternion Fourier Transform*.

[4] M. Bahri, Zulfajar, Asahino R. 2013. *Convolution and Correlation Theorem for Linear Canonical Transform and Properties*.

[5] Sangwine, S.J., Ell T.A. 2012. Complex and hypercomplex Discrete Fourier Transform on Matrix Exponential Form of Euler's Formula : *Applied Mathematics and Computation* 219 hal. 644-655.

[6] Supri. 2012. *Transformasi Fourier dua sisi*. Makassar.

[7] Surahman. 2012. *Konvolusi dan Cross-Correlasi untuk Transformasi Fourier Quaternion*. Makassar.