JIMT
Vol. 12 No. 1 Juni 2015 (Hal. 64 - 73)

Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan

ISSN : 2450 – 766X

# MENENTUKAN TINGKAT IMUNISASI DAN PENGOBATAN OPTIMAL DARI MODEL EPIDEMIK PENYAKIT CAMPAK DENGAN METODE MINIMUM PONTRYAGIN

**N. M. Ardilawati[1], R. Ratianingsih[2], dan A. I. Jaya[3]**

[1,2,3] Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako
Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia.
[1]Nimade.ardila@gmail.com, [2,3]ratianingsih@yahoo.com

## ABSTRACT

Measles is a highly contagious infectious disease. The disease is caused by the measles virus. The symptoms are as follows acute exanthem acute, febrile, catarrhal mucous membranes and respiratory tract, disorders of the eye, and then followed by the eruption makulopapula red and ends with desquamation of the skin. Mathematical model that represent the spread of  the shown that Measles is a endemic disease. The research studies an optimal controller of the Measles endemic model that aims to make the system no longer endemic. The controller is built by using the theory of Pontryagin minimum principle with immunization programs $(u_1)$ and treatment $(u_2)$. There are three control schemes of are examined, namely the controller of the immunization program, the controller the treatment program and the controller of  combination of immunization and treatment programs. The simulation results show that the optimal controller is obtained by combination the immunization and the treatment with immunization rates of 90% and the rate of treatment programs are given sufficiently  by 10%. The simulation result also shows that the main controller of the spread of Measles disease is immunization program.

**Keywords : Endemic, Mathematical Model, Measles, Minimum Pontryagin**

## ABSTRAK

Masalah penurunan kuantitas, kualitas maupun estetika ekosistem terumbu karang di Indonesia perlu diatasi. Campak adalah penyakit infeksi yang sangat menular. Penyakit tersebut disebabkan oleh virus campak. Adapun gejala-gejalanya adalah sebagai berikut eksantem akut, demam, kataral selaput lendir dan saluran pernapasan, ganguan pada mata, kemudian diikuti dengan erupsi makulopapula yang berwarna merah dan diakhiri dengan deskuamasi dari kulit. Model matematika yang mengkaji penyebaran  menujukan bahwa penyakit tersebut bersifat endemik. Dalam penelitian ini dibangun pengontrol optimal dari model endemik penyakit Campak yang bertujuan untuk membuat sistem tidak endemik lagi. Pengontrol dibangun dengan mengunakan teori prinsip minimum *Pontryagin* dengan program imunisasi $(u_1)$ dan pengobatan $(u_2)$. Terdapat 3 skema pengontrolan yang dikaji, yaitu pengontrolan dengan program imunisasi, pengontrolan dengan program pengobatan dan pengontrolan dengan kombinasi program imunisasi dan pengobatan. Hasil simulasi memperlihatkan bahwa pengontrolan optimal diperoleh dengan kombinasi antara program imunisasi dan pengobatan dengan tingkat imunisasi sebesar 90% dan tingkat program pengobatannya cukup diberikan sebesar 10%. Hasil simulasi juga memperlihatkan bahwa pengendalian utama penyebaran penyakit Campak adalah program pemberian imunisasi.

**Kata Kunci : Endemik, Minimum Pontryagin, Model matematika, Penyakit Campak**

# I. PENDAHULUAN

## 1.1. Latar Belakang

Indonesia penyakit Campak (*measles*) adalah penyakit menular yang disebabkan karena infeksi virus Campak dari family *paramyxovirus* dan genus *morbillivirus*. Penyakit ini ditandai dengan demam, batuk, peradangan selaput ikat mata, danruam kulit. Adapun cara untuk mencegah meluasnya penyakit ini yaitu dengan melakukan program vaksinasi. Selain vaksinasi, dengan memberikan pengobatan (*treatment*) yang tepat bagi penderita juga mampu mengurangi jumlah kasus kesakitan dan kematian yang disebabkan oleh penyakit Campak. Program vaksinasi dilakukan dengan memberikan senyawa antigen yang berfungsi untuk meningkatkan imunitas tubuh terhadap virus atau penyakit sedangkan treatment yang dilakukan bersifat suportif dengan memberikan asupan gizi yang baik, asupan cairan yang cukup, suplemen nutrisi, serta pemberian antibiotik seperti vitamin A untuk mencegah terjadinya infeksi sekunder. (http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/20116/4/Chapter%20II.pdf)

Dalam penelitian ini peneliti mengunakan model epidemi SEIR karena dalam pemodelan akan digunakan asumsi masa inkubasi. Dalam model ini populasi dibagi menjadi empat kelompok yaitu kelompok individu yang rentan (sehat tapi dapat terinfeksi) penyakit (*Susceptible*), kelompok individu yang terinfeksi penyakit tapi belum bisa menginfeksi (*Exposed*), kelompok individu yang terinfeksi dan dapat sembuh dari penyakit (*Infected*) , dan kelompok individu yang sembuh dan kebal dari penyakit (*Recovered*). Model ini mengambarkan alur penyebaran penyakit dari kelompok *Susceptible* menjadi *exposed* melalui kontak langsung maupun perantara lain. Individu *exposed* menjadi *infected* ketika ketahanan tubuh menurun kemudian individu *infected* yang mampu bertahan hidup akan sembuh dan masuk pada kelompok *recovered* (Ulfa, Maesaroh, 2013). Peneltian lebih lanjut perlu dilakukan untuk membangun pengontrolan terhadap model matematika penyakit tersebut melalui prinsip minimum Pontryagin.

### 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian diatas, maka pokok permasalahan yang dikemukakan dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan tingkat imunisasi dan tingkat pengobatan optimal dari model epidemik penyakit campak dengan metode minimum Pontryagin?

### 1.3. Tujuan

Berdasarkan perumusan masalah, penulisan ini bertujuan untuk menentukan dan mendapatkan tingkat imunisasi dan tingkat pengobatan optimal dari model epidemik penyakit Campak dengan metode minimum Pontryagin.

### 1.4. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diberikan dari penelitian ini adalah :

1. Meningkatkan pemahaman tentang model epidemi penyakit Campak.
2. Membantu dalam meminimalisir penyebaran penyakit Campak.
3. Secara umum untuk mengembangkan ilmu matematika, khususnya pada bidang sistem dinamik yang diterapkan pada masalah-masalah lain.
4. Penelitian ini juga memiliki dampak yang positif bagi perkembangan multidisiplin ilmu di Indonesia, yaitu Matematika, Biologi, dan Ilmu Kesehatan Masyarakat.

### 1.5. Asumsi Penelitian

Asumsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Masa inkubasi penyakit Campak diperhatikan dalam model.
2. Sistem dalam keadaan terkontrol dan interaksi populasi tertentu.
3. Kontrol yang dapat diterima disimbolkan dengan $u_1$ dan $u_2$ untuk menentukan representasi dari program imunisasi dan pengobatan terhadap penyakit Campak.

## II. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan sesuai prosedur dibawah ini :

1. Memulai penelitian.
2. Mengkaji literatur untuk membangun pengontrol model epidemi penyakit Campak.
3. Mengkaji kestabilan model SEIR
4. Membangun pengontrol model epidemi penyakit Campak.
5. Menentukan penyelesaian optimal kontrol.
6. Melakukan simulasi untuk melahiat apakah sistem telah terkontrol. Jika sistem terkontrol maka dilanjutkan ke langkah selanjutnya, namun jika tidak maka kembali ke langkah (4).
7. Menyimpulkan hasil penelitian.

## III. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1. Hasil penelitian

Penelitian ini merupakan kajian terhadap model epidemik penyakit Campak yang dilakukan dengan menunjukan kajian pengontrol optimal dari model matematika penyakit tersebut. Model epidemik penyakit Campak dibangun sebagai berikut.

3.1.1. Kestabilan Model SEIR di titik kritis

$$\frac{dS}{dt} = b - SI\beta - \mu \quad \text{.......} \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = SI\beta - \mu - \delta E \quad \text{.......} \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \mu - \gamma I \quad \text{.......} \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu \quad \text{.......} \quad (4)$$

Dari persamaan (1), (2), (3) dan (4) diperoleh nilai titik kritis yang memenuhi adalah

$$(S, E, I, R) = \left(\frac{(\mu+\gamma)\,(\mu+\delta)}{\delta\beta}, \frac{b\delta\beta-\mu^3+\mu^2\delta+\gamma\mu^2+\mu\delta\gamma}{\beta(\mu+\delta)\delta}, \frac{b\delta\beta-\mu^3+\mu^2\delta+\gamma\mu^2+\mu\delta\gamma}{\beta(\mu^2+\mu\delta+\gamma\mu+\delta\gamma)}, \frac{\gamma(b\delta\beta-\mu^3+\mu^2\delta+\gamma\mu^2+\mu\delta\gamma)}{\mu\beta(\mu^2+\mu\delta+\gamma\mu+\delta\gamma)}\right) \quad .. \quad (5)$$

3.1.2. Analisis Kestabilan Titik Kritis

Matriks Jacobi $(J_1)$ digunakan untuk mencari nilai eigen yang diperoleh dengan membentuk

$$Det\ (j_1 - \lambda_1 I)) = \begin{bmatrix} -W + \left(\frac{b\delta\beta-\mu^3+\mu^2\delta+\gamma\mu^2+\mu\delta\gamma}{\beta(\mu^2+\mu\delta+\gamma\mu+\delta\gamma)}\right)\beta - \mu - \lambda_1 & 0 & -\left(U + \frac{(\mu+\gamma)\,(\mu+\delta)}{\delta\beta}\right)\beta & 0 \\ W + \frac{b\delta\beta-\mu^3+\mu^2\delta+\gamma\mu^2+\mu\delta\gamma}{\beta(\mu^2+\mu\delta+\gamma\mu+\delta\gamma)}\beta & -(\delta+\mu) - \lambda_2 & \beta\left(U + \frac{(\mu+\gamma)\,(\mu+\delta)}{\delta\beta}\right) & 0 \\ 0 & \delta & -(\gamma+\mu) - \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \lambda_4 \end{bmatrix}$$

Dari hasil tersebut diperoleh $\lambda_1 = \frac{b\delta\beta-\mu}{\mu^2+\mu\delta+\gamma\mu+\delta\gamma}$, $\lambda_2$=$\delta - \mu, \lambda_3 = \gamma - \mu$ dan $\lambda_4$= $-\mu$ Sehingga perlu diperiksa syarat-syarat kestabilannya.

3.1.3. Membangun Pengontrol Model Epidemik Penyakit Campak

Pada model epidemik penyakit Campak ada dua cara yang dapat dilakukan untuk mencegah penyebaran penyakit yaitu dengan cara meminimalisir banyaknya penderita yang terinfeksi penyakit melalui program Imunisasi untuk populasi rentan terinfeksi dan memberikan program pengobatan dengan memberikan vitamin A pada penderita penyakit Campak. Secara matematis, hal ini dilakukan dengan membangun pengontrol $u_1(t)$ untuk program pemberikan vaksin pada kelas populasi rentan $Susceptible\ (S)$, dan $u_2(t)$ untuk program pengobatan pada kelas populasi terinfeksi $Infectious\ (I)$. Pengontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ ditempatkan pada (1), (2), (3) dan (4).

3.1.4. Penyelesaian Optimal Kontrol dengan Program Imunisasi pada Kelas Populasi Rentan $Susceptible\ (S)$

Hal pertama yang dilakukan untuk menyelesaikan optimal kontrol adalah dengan menentukan fungsi Hamiltonian:

$H = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t)$ ........................................................................ (6)

dari persamaan *Hamiltonian* yang terbentuk akan diperoleh persamaan, *co-state* dan kondisi stasioner.

1. Persamaan co-state

$\dot{\lambda_1} = -\frac{\partial H}{\partial S} = -A_2 S - \lambda_1(-u_1 I\beta - \mu) - \lambda_2(u_1)I\beta)$ ................................ (7)

$\dot{\lambda_2} = -\frac{\partial H}{\partial E} = -\lambda_2(-\mu - \delta) - \lambda_3(\delta)$ ...................................................... (8)

$\dot{\lambda_3} = -\frac{\partial H}{\partial I} = \lambda_1(uS\beta) - \lambda_2(uS\beta) - \lambda_3(-\mu - \delta) - \lambda_4 . \gamma$ ........................ (9)

$\dot{\lambda_4} = -\frac{\partial H}{\partial R} = \lambda_4(\mu)$ ....................................................................... (10)

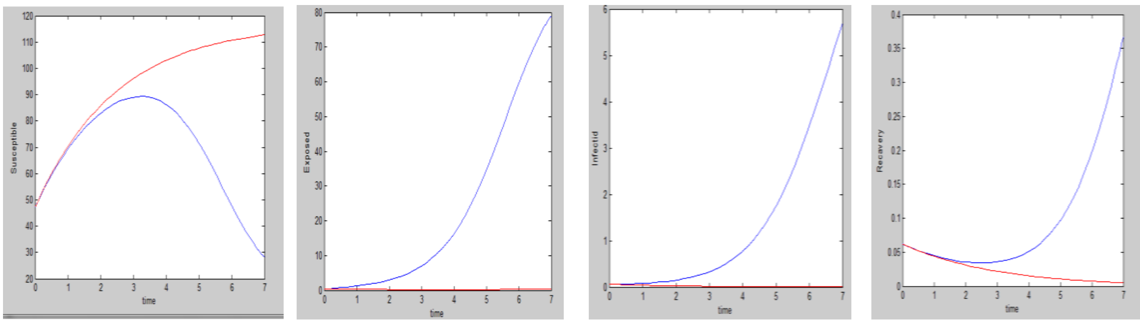
2. Kondisi Stasioner

$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$, dengan kondisi batas $0{,}1 \leq u \leq 0.9$ ...................................... (11)

**Simulasi**

Untuk mendapatkan simulasi berupa kurva dibutuhkan nilai $b = 47{,}204$, $\beta = 0{,}315$, $\delta = 0{,}062$, $\gamma = 0{,}062$, $\mu = 0.403$, $S = 47204$, $E = 315$, $I = 62$ dan $R = 62$.

Sumber : UPT Sudartin Tahun 2010



(a) (b) (c) (d)

Gambar 1 : Kurva Optimal Kontrol dengan Program Imunisasi Pada Kelas Populasi Rentan $Susceptible\ (S)$

Gambar 1a menunjukkan populasi rentan (*Susceptible*) tanpa pengontrol yang mula-mula meningkat namun mengalami penurunan setelah 3 tahun. Hal ini disebabkan sebagian populasi *Susceptible (S)* tanpa pengontrol berpindah ke kelompok populasi *Exposed (E).* Tanpa pengontrol, populasi $Exposed\ (E)$ akan meningkat seiring dengan bertambahnya waktu menuju ke total populasi *N* seperti ditunjukkan pada gambar 1b. Sedangkan pada populasi $Exposed\ (E)$ dengan pengontrol tidak terjadi peningkatan populasi *Exposed (E)* dapat dilihat juga pada Gambar 1c yang merupakan Populasi $Infectious\,(I)$ Terhadap Waktu. Tanpa pengontrol, populasi penderita penyakit Campak akan meningkat secara signifikan seiring dengan berjalannya waktu yakni berada di atas grafik populasi *I* dengan pengontrol terlihat sudah mendekati angka nol. Walaupun terlihat adanya kenaikan jumlah penderita namun jumlahnya sangat kecil. Pada gambar 1d Populasi $Recovery\ (R)$ terhadap waktu tanpa pengontrol akan meningkat seiring dengan bertambahnya waktu, sedangkan populasi $Recovery\ (R)$ dengan pengontrol akan menurun mendekati anggka nol dan terus bertambah seperti itu. Hal ini disebabkan oleh keberhasilan program pengontrolan yang mengakibatkan rendahnya populasi yang terinfeksi penyakit Campak.

3.1.5. Penyelesaian Optimal Kontrol Pada Kelas Populasi Terinfeksi $Infectious\,(I)$

Hal pertama yang dilakukan untuk menyelesaikan optimal kontrol adalah dengan menentukan fungsi Hamiltonian.

$H = f(x,u,t) + \lambda g(x,u,t)$

Dari persamaan Hamiltonia yang terbentuk akan diperoleh persamaan, co-state dan kondisi stasioner.

1. Persamaan co-state

$$\dot{\lambda_1} = -\frac{\partial H}{\partial s} = -\lambda_1(-I\beta - \mu) - \lambda_2(I\beta) \quad (12)$$

$$\dot{\lambda_2} = -\frac{\partial H}{\partial e} = -\lambda_2(-\mu - \delta) + \lambda_3(\delta) \quad (13)$$

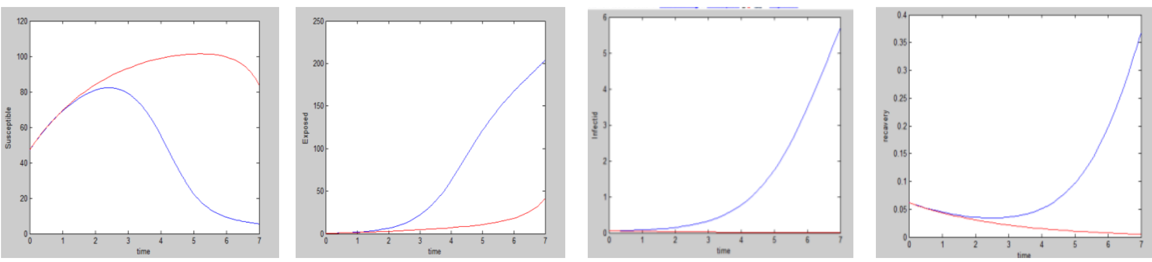
$$\dot{\lambda_3} = -\frac{\partial H}{\partial i} = -A_2 I + \lambda_1(S\beta) - \lambda_2\,(S\beta) - \lambda_3\left(-\mu - \gamma(1-u_2)\right) - \lambda_4(1-u_2)\gamma \quad (14)$$

$$\dot{\lambda_4} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \lambda_4(\mu) \quad (15)$$

2. Kondisi Stasioner

$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$, dengan kondisi batas $0{,}1 \leq u_2 \leq 0.9$ ..... (16)

**Simulasi**



(a) (b) (c) (d)

Gambar 2 : Kurva Optimal Kontrol pada Kelas Populasi Terinfeksi $Infectious\,(I)$

Gambar 2a menunjukkan populasi rentan (*Susceptible*) baik tanpa pengontrol maupun dengan pengontrol yang mula-mula meningkat namun mengalami penurunan setelah 3 tahun Sebagian populasi *Susceptible (S)* dengan maupun tanpa pengontrol berpindah ke kelompok populasi *Exposed (E).* Hal ini memberikan arti bahwa dengan melakukan pengontrolan pada kelas populasi *Infectious (I)* tidak bisa menekan populasi rentan *S* untuk tidak terjangkit penyakit Campak. Gambar 2b menunjukkan Populasi $Exposed\,(E)$ terhadap waktu dengan pengontrol akan meningkat seiring dengan bertambahnya waktu, peningkatan ini disebabkan oleh perpindahan sebagian populasi $Exposed\,(E)$ menjadi $Infectious\,(I)$. Pada Gambar 2c Populasi $Infectious\,(I)$ terhadap waktu tanpa pengontrol akan meningkat secara signifikan sedangkan populasi $Infectious\,(I)$ dengan pengontrol akan terlihat berada mendekati angka nol meskipun pada kelas populasi *Exposed (E)* terlihat ada peningkatan populasi *Exposed (E)* masuk ke kelas $Infectious\,(I)$, namun dengan program pengobatan mampu menekan jumlah populasi $Infectious\,(I)$. Gambar 2d menunjukkan Populasi $Recovery\ (R)$ Terhadap Waktu Tanpa pengontrol akan meningkat seiring dengan bertambahnya waktu, sedangkan populasi $Recovery\ (R)$ dengan pengontrol akan menurun mendekati anggka nol dan terus bertambah seperti itu. Hal ini disebabkan oleh keberhasilan program pengontrolan yang mengakibatkan rendahnya populasi yang terinfeksi penyakit Campak.

3.1.6. Penyelesaian Optimal Kontrol Pada Kelas Populasi Rentan $Susceptible\ (S)$ dan Kelas Populasi Terinfeksi $Infectious\ (I)$.

Menyelesaikan optimal kontrol adalah dengan menentukan fungsi Hamiltonian.

$H = f(x,u,t) + \lambda g(x,u,t)$

Dari persamaan *Hamiltonia* yang terbentuk akan diperoleh persamaan, *co-state* dan kondisi stasioner.

1. Persamaan co-state

$$\dot{\lambda_1} = -\frac{\partial H}{\partial s} = -A_3 S - \lambda_1(-(u_1)I\beta - \mu) - \lambda_2((u_1)I\beta) \quad (17)$$

$$\dot{\lambda_2} = -\frac{\partial H}{\partial e} = -\lambda_2((-\mu - \delta) - \lambda_3(\delta) \quad (18)$$

$$\dot{\lambda_3} = -\frac{\partial H}{\partial i} = -A_4 I + \lambda_1(u_1)S\beta - \lambda_2(u_1)S\beta - \lambda_3\big(-\mu - \gamma(1-u_2)\big) - \lambda_4.(1-u_2)\gamma \quad (19)$$

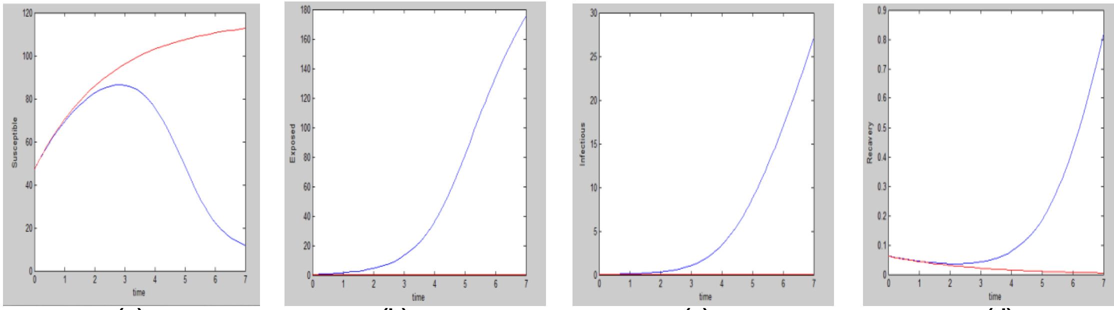
$$\dot{\lambda_4} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \lambda_4(\mu) \quad (20)$$

2. Kondisi Stasioner

$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$, Dengan kondisi batas $0.1 \le u_1 \le 0.9$ ..................................... (21)

$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$, Dengan kondisi batas $0.1 \le u_2 \le 0.9$ ..................................... (22)

**Simulasi**




(a) (b) (c) (d)

Gambar 3 : Kurva Optimal Kontrol pada Kelas Populasi Rentan $Susceptible\ (S)$ dan Kelas Populasi Terinfeksi $Infectious\ (I)$

Gambar 3a Populasi Populasi rentan $Susceptible(S)$ Terhadap Waktu. Tanpa pengontrol, populasi rentan *Susceptible (S)* akan naik, namun demikian banyaknya populasi *Susceptible (S)* tanpa pengontrol terlihat menurun setelah 3 tahun. Hal ini memberikan arti bahwa sebagian populasi *Susceptible (S)* tanpa pengontrol berpindah ke kelompok populasi *Exposed (E).* Kondisi ini tidak terjadi pada populasi *Susceptible (S)* dengan pengontrol. Gambar 3b. Populasi $Exposed\ (E)$ Terhadap Waktu. Tanpa pengontrol, populasi $Exposed\ (E)$ akan meningkat seiring dengan bertambahnya waktu, peningkatan ini disebabkan oleh perpindahan sebagian populasi *Susceptible (S)* menjadi $Exposed\ (E)$, sedangkan pada populasi $Exposed\ (E)$ dengan pengontrol berada mendekati angka nol. Gambar 3c Populasi $Infectious\ (I)$ Terhadap Waktu**.** Tanpa pengontrol, populasi penderita penyakit Campak akan meningkat secara signifikan seiring dengan berjalannya waktu yakni berada di atas grafik populasi *I* dengan pengontrol yang terlihat mendekati angka nol. Walaupun terlihat adanya kenaikan jumlah penderita namun jumlahnya sangat kecil. Dan Gambar 3 d Populasi $Recovery\ (R)$ Terhadap Waktu Tanpa pengontrol, populasi $Recovery\ (R)$ akan meningkat seiring dengan bertambahnya waktu, sedangkan populasi $Recovery\ (R)$ dengan pengontrol akan menurun mendekati anggka nol dan terus bertambah seperti itu.

## 3.2. Pembahasan

Hasil yang diperoleh pada gambar 1a sampai 1d memperlihatkan bahwa pengontrolan pada kelas populasi rentan $Susceptible(S)$ mampu memaksimumkan pemberian vaksin pada jumlah populasi rentan *Susceptible (S)* , dan menekan jumlah populasi *Exposed (E)* sehingga menurunkan populasi terinfeksi $Infectious\ (I)$ hingga mendekati angka nol. Pada gambar 2a sampai 2d memperlihatkan pengontrolan program pengobatan pada kelas Populasi terinfeksi

$Infectious\ (I)$ dapat menurunkan populasi penderita penyakit Campak. Namun tidak mampu mengontrol julmah populasi $Susceptible(S)$ berpindah ke kelas populasi *Exposed (E)* dan tidak mampu menekan peningkatan populasi *Exposed (E)* memasuki kelompok kelas yang terinfeksi $Infectious\ (I)$. Pada gambar 3 a sampai 3 d memperlihatkan jika dilakukan pengontrolan pada kombinasi *S* dan *I* dapat menurunkan populasi penderita penyakit Campak dan memaksimalkan jumlah populasi $Susceptible(S)$ yang akan di beri vaksin, meskipun terlihat adanya peningkatan pada jumlah populasi *Exposed (E)* namun setelah memasiki kelas populasi $Infectious\ (I)$ akan terlihat rendah. Hal tersebut memberikan arti bahwa program pengobatan mampu menekan populasi *Exposed (E)* untuk tidak terinfeksi enyakit Campak.

## IV. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa :

1. Pengontrolan optimal dari model epidemik penyakit Campak paling baik adalah dengan melakukan pengontrolah pasa $S$ dan $I$ yaitu dengan meninimalisir populasi yang terinfeksi penyakit campak dengan pemberian pengobatan dam memaksimalkan populasi penyakit campak yang akan di beri vaksin.
2. Pengontrolan optimal dari model epidemik penyakit Campak ditentukan dengan
   a. Membangun *performance index* untuk meminimumkan jumlah penderita penyakit Campak.
   b. Menyelesaikan persamaan optimal control yang dilakukan dengan menentukan fungsi Hamiltonian.
   c. Fungsi Hamiltonian member persamaan state, co-state dan kondisi stasioner. Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut, diperoleh optimal control untuk parameter $u_1$ dan $u_2$ sebagai berikut :
   $$u_1 = maks\left\{\min\left[\frac{\lambda_1(se\beta) + \lambda_2(se\beta)}{A_1}, 0.9\right] 0{,}1\right\}$$
   $$u_2 = maks\left\{\min\left[\frac{\lambda_3(\gamma ir) - (\gamma ir)}{A_2}, 0.9\right] 0{,}1\right\}$$
   d. Mensubtitusi optimal kontrol yang diperoleh dalam keadaan state.
3. Pada model epidemik penyakit Campak dengan perinsip Metode Pontriagyagin dapat diketahui nilai parameter $u_1 = \frac{\lambda_1(SI\beta)-\lambda_2(SI\beta)}{A_1} = 0.9000$ dan $u_2 = \frac{\lambda_3(\gamma I)+\lambda_4(\gamma I)}{A_2} = 0.1000$ dari hasil tersebut memperlihatkan bahwa tingkat imunisasi harus diberikan secara maksimal sebesar 90 % dan tingkat program pengobatannya cukup diberikan sebesar 10%. Hal ini mamberi arti bahwa pengendali utama penyebaran penyakit Campak adalah program pemberian imunisasi.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] …….. *Makalah Penyakit Campak.* http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/20116/4/Chapter%20II.pdf, diakses 6 September 2014.

[2] Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Tengah. 2012. *Profil Kesehatan Sulawesi Tengah Tahun*. Palu. Sulawesi Tengah.

[3] Ekawati, Animah, 2010 *Kestabilan Model SEIR*, Proceeding of the ISSN 2010.

[4] Fadila, Ana. 2013. *Kontrol Optimal Pada Model epidemic SIR.* Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika, FMIPA. Universitas Brawijaya. Malang.

[5] Idayani Darsih. 2010. *Kendali Optimal Pada Pengadaan Bahan MentahDengan Kebijakan Tepat Waktu, dan* Penundaan. ITS. Surabaya.

[6] Tu, P. N. V. 1994. *Dynamical system An Introduction with application in economics and biologi*. Springer-Verlay. Germany.

[7]. Ulfa, Maesaroh. 2013. *Model Matematika Untuk Kontrol Campak menggunakan Vaksinasi.* Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika UIN Sunan Kalijaga. Yogyakarta.