JIMT
Vol. 12 No. 1 Juni 2015 (Hal. 83 - 91)

JIMT
Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan

ISSN : 2450 – 766X

PELABELAN SUPER MEAN PADA GRAF $D_n(C_3)$ DAN $D_n(C_3) \textcircled{v} P_t$

S. Wahyuningsi[1], I W. Sudarsana[2], dan S. Musdalifah[3]

[1,2,3] Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako
Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia.
[1]sriwahyuningsiarwan@ymail.com, [2]sudarsanaiwayan@yahoo.co.id, [3]selvymusdalifah@yahoo.com

ABSTRACT

Graph theory is one of important subject in mathematical sciences and has many benefits because its can be applied to solve many problems, especially in communication and transportation systems, geographical navigation and radar. Super mean labeling on graph $G(V,E)$ with p vertices and q edges is an injection $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p+q\}$ such that for each edge $e = uv$ labeled by $f^*(e) = \left\lceil \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rceil$ and form the set $f\big(V(G)\big) \cup \{f^*(e): e \in E(G)\} = \{1,2,3,\ldots,p+q\}$. In this paper we have showed that graphs $D_n(C_3)$ and $D_n(C_3) \textcircled{v} P_t$ are super mean.

Key Words : Duplication, Duplication Graph, Super Mean Labeling

ABSTRAK

Teori graf adalah salah satu ilmu matematika yang penting dan mempunyai banyak manfaat karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari, khususnya pada sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar dan lain sebagainya. Pelabelan super mean pada graf $G(V,E)$ dengan p titik dan q sisi adalah pemetaan injektif $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p+q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $e = uv$ yang dilabeli dengan $f^*(e) = \left\lceil \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rceil$ dan membentuk himpunan $f\big(V(G)\big) \cup \{f^*(e): e \in E(G)\} = \{1,2,3,\ldots,p+q\}$. Pada penelitian ini dilakukan investigasi terhadap graf $D_n(C_3)$ dan $D_n(C_3) \textcircled{v} P_t$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf $D_n(C_3)$ and $D_n(C_3) \textcircled{v} P_t$ adalah super mean.

Kata Kunci : Graf Duplikasi, Duplikasi, Pelabelan Super Mean

I. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu ilmu yang berkembang pesat dalam dunia matematika. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Saat itu dia memikirkan kemungkinan untuk menyeberangi semua jembatan di kota Kaliningrad, Rusia, tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Publikasi atas permasalahan ini dan solusi yang dia tawarkan saat ini dikenal dengan teori graf (Cunningham, 2004). Suatu graf dapat dipandang sebagai sistem $G(V,E)$

dimana V adalah himpunan titik yang tak kosong dan E adalah himpunan sisi (pasangan elemen) dari V.

Salah satu cabang kajian graf adalah pelabelan suatu graf. Pelabelan graf merupakan salah satu topik dari teori graf yang mendapat perhatian khusus, karena model-model yang ada dalam teori graf berguna untuk aplikasi yang luas terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, riset, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan lain sebagainya.

Ada banyak jenis pelabelan yang telah dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan mean yang pertama kali diperkenalkan secara umum oleh Somasundaram dan Ponraj (2003). Sementara itu Ramya et al (2012) adalah orang yang memperkenalkan pelabelan super mean pada graf.

Pelabelan super mean pada graf $G(V,E)$ dengan p titik dan q sisi adalah pemetaan injektif $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,p+q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $e = uv$ dilabeli dengan $f^*(e) = \left\lceil \frac{f(u)+f(v)}{2} \right\rceil$ dan membentuk himpunan $f\big(V(G)\big) \cup \{f^*(e): e \in E(G)\} = \{1,2,3,\ldots,p+q\}$. Beberapa graf yang merupakan super mean yaitu lintasan, siklus dan lainnya, namun untuk hasil operasi pada graf $D_n(C_3)$ dan $D_n(C_3)$ ⓥ $P_t P_t$ masih merupakan masalah terbuka (Gallian, 2013).

II. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan sesuai dengan prosedur dibawah ini :

1. Memulai penelitian
2. Studi literatur
3. Menotasikan titik dan sisi pada graf $D_n(C_3)$ dan $D_n(C_3)$ ⓥ P_t
4. Memberikan label titik dan sisi pada graf $D_n(C_3)$ dan $D_n(C_3)$ ⓥ P_t
5. Membuat formula pelabelan super mean graf $D_n D_n(C_3)$ dan $D_n(C_3)$ ⓥ P_t
6. Membuat teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti
7. Selesai.

III. HASIL

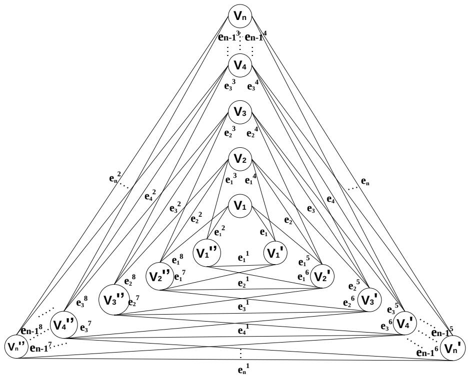
Sebelum ditunjukkan bahwa graf $D_n(C_3)$ dan $D_n(C_3)$ ⓥ P_t adalah pelabelan super mean, pada bagian ini terlebih dahulu akan diberikan definisi dan penotasian graf $D_n(C_3)$ dan $D_n(C_3)$ ⓥ P_t.

Definisi 1 :

Duplikasi graf G sebanyak n kali, dinotasikan dengan $D_n(G)$, adalah graf yang diperoleh dari n rangkap graf G, sebut $G^0, G^1, G^2, \ldots, G^{n-1}$, dengan menghubungkan masing-masing titik u^{i-1} di G^{i-1}

dengan titik-titik tetangga u^i di G^i dengan $i = 1, 2, \ldots, n$. untuk $G = C_3$, ilustrasi $D_n(C_3)$ tersaji dalam Gambar 1.

Penotasian Graf $D_n(C_3)$:



Gambar 1 : Penotasian Graf $D_n(C_3)$

Berdasarkan Gambar 1 diatas dapat dinotasikan himpunan titik graf $D_n(C_3)$ sebagai berikut:

$V(D_n(C_3)) = \{v_i, v_i', v_i'' | 1 \leq i \leq n\}$ .... (1)

dan himpunan sisi graf $D_n(C_3)$ dinotasikan dalam :

$E(D_n(C_3)) = \{e_i, e_i^1, e_i^2 \,; 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_i^3, e_i^4, e_i^5, e_i^6, e_i^7, e_i^8 \,;\ 1 \leq i \leq n-1\}$ .... (2)

dengan

$e_i = v_i\, v_i' \ ;\ 1 \leq i \leq n$ .... (3)

$e_i^1 = v_i'\, v_i'' \ ;\ 1 \leq i \leq n$ .... (4)

$e_i^2 = v_i''\, v_i \ ;\ 1 \leq i \leq n$ .... (5)

$e_i^3 = v_{i+1}\, v_i'' \ ;\ 1 \leq i \leq n-1$ .... (6)

$e_i^4 = v_{i+1}\, v_i' \ ;\ 1 \leq i \leq n-1$ .... (7)

$e_i^5 = v_{i+1}'\, v_i \ ;\ 1 \leq i \leq n-1$ .... (8)

$e_i^6 = v_{i+1}'\, v_i'' \ ;\ 1 \leq i \leq n-1$ .... (9)

$e_i^7 = v_{i+1}''\, v_i' \ ;\ 1 \leq i \leq n-1$ .... (10)

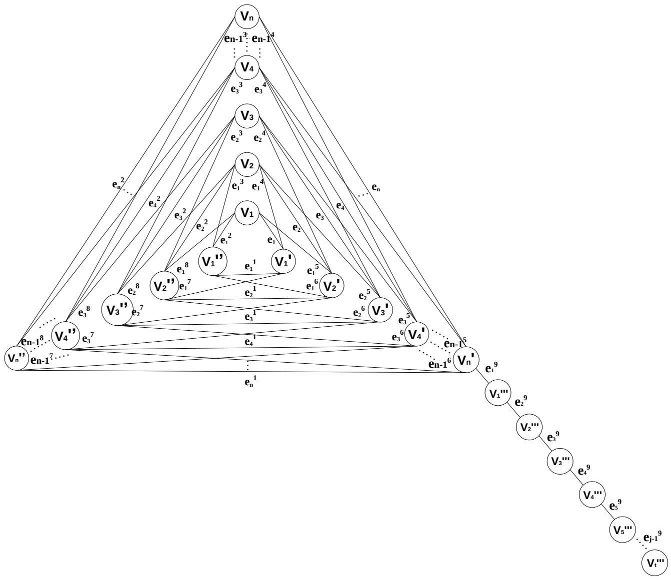
$e_i^8 = v_{i+1}''\, v_i \ ;\ 1 \leq i \leq n-1$ .... (11)

dengan demikian, untuk graf $D_n\,(C_3)$ diperoleh banyaknya titik adalah $3n$ dan banyaknya sisi adalah $9n - 6$ .... (12)

Definisi 2 :

Notasi graf $D_n(C_3)^{\text{ⓥ}} P_t$ menyatakan suatu graf yang diperoleh dari graf $D_n(G)$ dengan menghubungkan graf lintasan dengan t titik, P_t, pada salah satu titik di graf yang ke $n-1$, G^{n-1}, pada $D_n(G)$. untuk $G = C_3$, ilustrasi $D_n(C_3)^{\text{ⓥ}} P_t$ tersaji dalam Gambar 2.

Penotasian $\boldsymbol{D_n(C_3)}$ $\textcircled{v}$ $\boldsymbol{P_t}$:



Gambar 2 : Penotasian Graf $D_n(C_3)\,\textcircled{v}\,P_t$

Berdasarkan Gambar 2 diatas dapat dinotasikan himpunan titik graf $D_n(C_3)\,\textcircled{v}\,P_t$ sebagai berikut :

$V\left(D_n(C_3)\,\textcircled{v}\,P_t\right) = \{v_i, v_i', v_i'', v_j''' \mid ;\ 1 \le i \le n\ , 1 \le j \le t\}$ ....(13)

dan himpunan sisi graf $D_n(C_3)\,\textcircled{v}\,P_t$ dinotasikan dengan :

$E\left(D_n(C_3)\,\textcircled{v}\,P_t\right) = \{e_i, e_i^1, e_i^2\ ;\ 1 \le i \le n\} \cup \{e_i^3, e_i^4, e_i^5, e_i^6, e_i^7, e_i^8\ ;\ 1 \le i \le n-1\}$

$\cup\ \{e_j^9\ ;\ 1 \le j \le t\}$ ....(14)

dengan

$e_i = v_i\, v_i'\ \ ;\ 1 \le i \le n$ ....(15)

$e_i^1 = v_i'\, v_i''\ \ ;\ 1 \le i \le n$ ....(16)

$e_i^2 = v_i''\, v_i\ ;\ 1 \le i \le n$ ....(17)

$e_i^3 = v_{i+1}\, v_i''\ \ ;\ 1 \le i \le n-1$ ....(18)

$e_i^4 = v_{i+1}\, v_i'\ \ ;\ 1 \le i \le n-1$ ....(19)

$e_i^5 = v_{i+1}'\, v_i\ \ ;\ 1 \le i \le n-1$ ....(20)

$e_i^6 = v_{i+1}'\, v_i''\ \ ;\ 1 \le i \le n-1$ ....(21)

$e_i^7 = v_{i+1}''\, v_i'\ \ ;\ 1 \le i \le n-1$ ....(22)

$e_i^8 = v_{i+1}''\, v_i\ ;\ 1 \le i \le n-1$ ....(23)

$$e_j^9 = \begin{cases} v_n'\ \ v_j''' & ,\quad j = 1 \text{ dan } n \text{ genap} \\ v_n''\ v_j''' & ,\ j = 1 \text{ dan } n \text{ ganjil} \\ v_{j-1}'''\ v_j''' & ,\quad 2 \le j \le t. \end{cases}$$ ....(24)

dengan demikian untuk graf $D_n(C_3)$ $\textcircled{v}$ P_t diperoleh banyaknya titik adalah $3n+t$ dan banyaknya sisi adalah $9n-6+t$. ....(25)

Teorema 1 :

Graf $D_n(C_3)$ adalah super mean untuk $n \geq 1$.

Bukti :

Pandang graf $D_n(C_3)$ mempunyai banyaknya titik $p = 3n$ dan banyaknya sisi $q = 9n - 6$. Berdasarkan penotasian titik dan sisi pada Gambar 1, definisikan fungsi injektif $f: V(D_n(C_3)) \rightarrow \{1,2,3 \dots, 12n - 6\}$ sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} 12i - 11 \;;\; 1 \leq i \leq n \;;\; i \text{ ganjil} \\ 12i - 9 \;;\; 1 \leq i \leq n \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (26)$$

$$f(v_i') = \begin{cases} 12i - 9 \;;\; 1 \leq i \leq n \;;\; i \text{ ganjil} \\ 12i - 6 \;;\; 1 \leq i \leq n \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (27)$$

$$f(v_i'') = \begin{cases} 12i - 6 \;;\; 1 \leq i \leq n \;;\; i \text{ ganjil} \\ 12i - 11 \;;\; 1 \leq i \leq n \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (28)$$

Berdasarkan fungsi titik-titik di atas diperoleh fungsi pelabelan pada sisi sebagai berikut :

$$f^*(e_i) = \left\lceil \frac{f(v_i) + f(v_i')}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i - 10 \;,\; 1 \leq i \leq n; i \text{ ganjil} \\ 12i - 7 \;,\; 1 \leq i \leq n;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (29)$$

$$f^*(e_i^1) = \left\lceil \frac{f(v_i') + f(v_i'')}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i - 7 \;,\; 1 \leq i \leq n; i \text{ ganjil} \\ 12i - 8 \;,\; 1 \leq i \leq n;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (30)$$

$$f^*(e_i^2) = \left\lceil \frac{f(v_i) + f(v_i'')}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i - 8 \;,\; 1 \leq i \leq n; i \text{ ganjil} \\ 12i - 10 \;,\; 1 \leq i \leq n;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (31)$$

$$f^*(e_i^3) = \left\lceil \frac{f(v_{i+1}) + f(v_i'')}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i - 1 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1;\; i \text{ ganjil} \\ 12i - 5 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (32)$$

$$f^*(e_i^4) = \left\lceil \frac{f(v_{i+1}) + f(v_i')}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i - 3 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1;\; i \text{ ganjil} \\ 12i - 2 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (33)$$

$$f^*(e_i^5) = \left\lceil \frac{f(v_{i+1}') + f(v_i)}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i - 2 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ ganjil} \\ 12i - 3 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (34)$$

$$f^*(e_i^6) = \left\lceil \frac{f(v_{i+1}') + f(v_i'')}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ ganjil} \\ 12i - 4 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (35)$$

$$f^*(e_i^7) = \left\lceil \frac{f(v_{i+1}'') + f(v_i')}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i - 4 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ ganjil} \\ 12i \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (36)$$

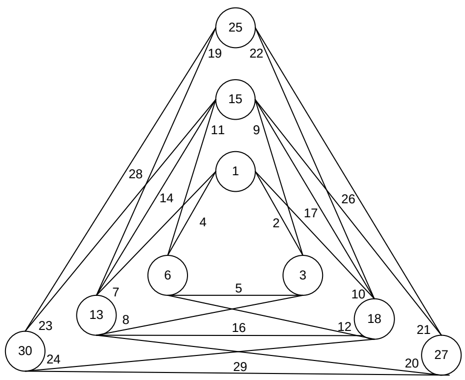
$$f^*(e_i^8) = \left\lceil \frac{f(v_{i+1}'') + f(v_i)}{2} \right\rceil = \begin{cases} 12i - 5 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ ganjil} \\ 12i - 1 \;,\; 1 \leq i \leq n - 1 \;;\; i \text{ genap} \end{cases} \qquad (37)$$

Bentuk himpunan

$A_1 = \{f(v_i) = 12i - 11,\ \ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_2 = \{f(v_i) = 12i - 9,\ \ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ genap}\}$
$A_3 = \{f(v_i') = 12i - 9,\ \ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_4 = \{f(v_i') = 12i - 6,\ \ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ genap}\}$
$A_5 = \{f(v_i'') = 12i - 6,\ \ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_6 = \{f(v_i'') = 12i - 11,\ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ genap}\}$
$A_7 = \{f^*(e_i) = 12i - 10,\ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_8 = \{f^*(e_i) = 12i - 7,\ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ genap}\}$
$A_9 = \{f^*(e_i^1) = 12i - 7,\ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_{10} = \{f^*(e_i^1) = 12i - 8,\ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ genap}\}$
$A_{11} = \{f^*(e_i^2) = 12i - 8, 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_{12} = \{f^*(e_i^2) = 12i - 10,\ 1 \le i \le n\ \ ;\ i \text{ genap}\}$
$A_{13} = \{f^*(e_i^3) = 12i - 1,\ 1 \le i \le n - 1\,;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_{14} = \{f^*(e_i^3) = 12i - 5,\ 1 \le i \le n - 1\,;\ i \text{ genap}\}$
$A_{15} = \{f^*(e_i^4) = 12i - 3,\ 1 \le i \le n - 1\,;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_{16} = \{f^*(e_i^4) = 12i - 2,\ 1 \le i \le n - 1\,;\ i \text{ genap}\}$
$A_{17} = \{f^*(e_i^5) = 12i - 2,\ 1 \le i \le n - 1\ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_{18} = \{f^*(e_i^5) = 12i - 3,\ 1 \le i \le n - 1\,;\ i \text{ genap}\}$
$A_{19} = \{f^*(e_i^6) = 12i,\ \ 1 \le i \le n - 1\ \ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_{20} = \{f^*(e_i^6) = 12i - 4,\ 1 \le i \le n - 1\ \ ;\ i \text{ genap}\}$
$A_{21} = \{f^*(e_i^7) = 12i - 4,\ 1 \le i \le n - 1\ \ ;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_{22} = \{f^*(e_i^7) = 12i,\ \ 1 \le i \le n - 1\ \ ;\ i \text{ genap}\}$
$A_{23} = \{f^*(e_i^8) = 12i - 5,\ 1 \le i \le n - 1\,;\ i \text{ ganjil}\}$ $A_{24} = \{f^*(e_i^8) = 12i - 1,\ 1 \le i \le n - 1\ \ ;\ i \text{ genap}\}$

Gabungan himpunan-himpunan tersebut, $\bigcup_{i=1}^{24} A_i = f\big(V(D_n(C_3))\big) \cup \{f^*(e) : e \in E(D_n(C_3))\} = \{1, 2, 3, \dots, 12n - 6\}$. Oleh karena itu, graf $D_n(C_3)$ dapat dilabeli secara super mean. Dengan demikian, graf $D_n(C_3)$ adalah super mean, untuk $n \ge 1$.

Contoh :



Gambar 3 : Pelabelan Super Mean pada Graf $D_3(C_3)$

Teorema 2 :

Graf $D_n(C_3)$ ⓥ P_t adalah super mean untuk $n \ge 3$.

Bukti :

Pandang graf $D_n(C_3)$ ⓥ P_t mempunyai banyaknya titik $p = 3n + t$ dan banyaknya sisi $q = 9n - 6 + t$. Berdasarkan penotasian titik dan sisi pada Gambar 2, definisikan fungsi injektif $f : V\big(D_n(C_3)$ ⓥ $P_t\big) \to \{1,2,3 \dots, 12n - 6 + 2t\}$ sebagai berikut :

$$f(v_i)=\begin{cases}12i-11 & ; \quad 1\le i\le n \quad ; \quad i \text{ ganjil}\\ 12i-9 & ; \quad 1\le i\le n \quad ; \quad i \text{ genap}\end{cases} \tag{38}$$

$$f(v_i')=\begin{cases}12i-9 & ; \quad 1\le i\le n \quad ; \quad i \text{ ganjil}\\ 12i-6 & ; \quad 1\le i\le n \quad ; \quad i \text{ genap}\end{cases} \tag{39}$$

$$f(v_i'')=\begin{cases}12i-6 & ; \quad 1\le i\le n \quad ; \quad i \text{ ganjil}\\ 12i-11 & ; \quad 1\le i\le n \quad ; \quad i \text{ genap}\end{cases} \tag{40}$$

$$f\left(v_j'''\right)=12n-6+2j \quad ; \quad 1\le j\le t \tag{41}$$

Berdasarkan fungsi titik-titik di atas diperoleh fungsi pelabelan pada sisi sebagai berikut :

$$f^*\left(e_i\right)=\left\lceil\frac{f(v_i)+f(v_i')}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i-10 & , \quad 1\le i\le n\,; i \text{ ganjil}\\ 12i-7 & , \quad 1\le i\le n\,; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{42}$$

$$f^*\left(e_i^1\right)=\left\lceil\frac{f(v_i')+f(v_i'')}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i-7 & , \quad 1\le i\le n\,; i \text{ ganjil}\\ 12i-8 & , \quad 1\le i\le n\,; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{43}$$

$$f^*\left(e_i^2\right)=\left\lceil\frac{f\left(v_i\right)+f(v_i'')}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i-8 & , \quad 1\le i\le n\,; i \text{ ganjil}\\ 12i-10 & , \quad 1\le i\le n\,; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{44}$$

$$f^*\left(e_i^3\right)=\left\lceil\frac{f\left(v_{i+1}\right)+f(v_i'')}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i-1\,, & 1\le i\le n-1\,; \ i \text{ ganjil}\\ 12i-5\,, & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{45}$$

$$f^*\left(e_i^4\right)=\left\lceil\frac{f\left(v_{i+1}\right)+f(v_i')}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i-3\,, & 1\le i\le n-1\,; \ i \text{ ganjil}\\ 12i-2\,, & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{46}$$

$$f^*\left(e_i^5\right)=\left\lceil\frac{f(v_{i+1}')+f(v_i)}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i-2 \ , & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ ganjil}\\ 12i-3 \ , & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{47}$$

$$f^*\left(e_i^6\right)=\left\lceil\frac{f(v_{i+1}')+f(v_i'')}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i \ , & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ ganjil}\\ 12i-4 \ , & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{48}$$

$$f^*\left(e_i^7\right)=\left\lceil\frac{f(v_{i+1}'')+f(v_i')}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i-4 \ , & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ ganjil}\\ 12i \ , & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{49}$$

$$f^*\left(e_i^8\right)=\left\lceil\frac{f(v_{i+1}'')+f(v_i)}{2}\right\rceil=\begin{cases}12i-5 \ , & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ ganjil}\\ 12i-1 \ , & 1\le i\le n-1 \ ; \ i \text{ genap}\end{cases} \tag{50}$$

$$f^*\left(e_j^9\right)=\begin{cases}\left\lceil\frac{f(v_n')+f(v_j''')}{2}\right\rceil\\ \left\lceil\frac{f(v_n'')+f(v_j''')}{2}\right\rceil\\ \left\lceil\frac{f(v_{j-1}''')+f(v_j''')}{2}\right\rceil\end{cases}=\begin{cases}12n-6+j & ; \ j=1 \text{ dan } n \text{ genap}\\ 12n-6+j & ; \ j=1 \text{ dan } n \text{ ganjil}\\ 12n-7+2j & ; \ 2\le j\le t\end{cases} \tag{51}$$

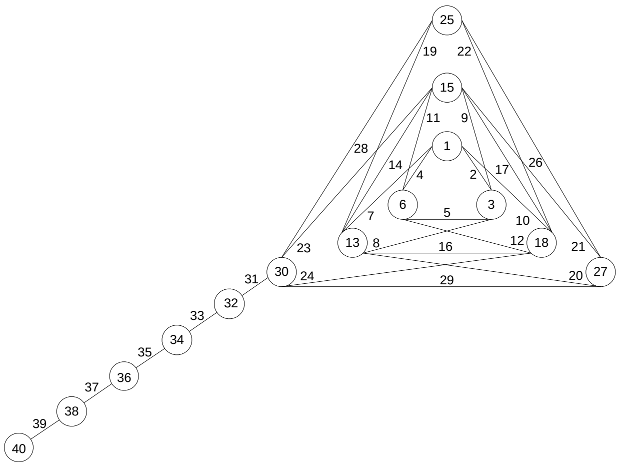
Bentuk himpunan

$A_1=\{f(v_i) : 12i-11, \quad 1\le i\le n \ ; \ i \text{ ganjil}\}$ $A_2=\{f(v_i) : 12i-9, \quad 1\le i\le n \ ; \ i \text{ genap}\}$
$A_3=\{f(v_i') : 12i-9, \quad 1\le i\le n \ ; \ i \text{ ganjil}\}$ $A_4=\{f(v_i') : 12i-6, \quad 1\le i\le n \ ; \ i \text{ genap}\}$
$A_5=\{f(v_i'') : 12i-6, \quad 1\le i\le n \ ; \ i \text{ ganjil}\}$ $A_6=\{f(v_i'') : 12i-11, \quad 1\le i\le n \ ; \ i \text{ genap}\}$
$A_7=\{f\left(v_j'''\right) : 12n-6+2j, \ 1\le j\le t\}$ $A_8=\{f^*\left(e_i\right) : 12i-10, \ 1\le i\le n \ ; \ i \text{ ganjil}\}$

$A_9 = \{f^*(e_i\ ) : 12i-7, \quad 1 \le i \le n \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{10} = \{f^*(e_i^1) : 12i-7, \quad 1 \le i \le n \ ; \ i$ ganjil$\}$
$A_{11} = \{f^*(e_i^1) : 12i-8, \quad 1 \le i \le n \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{12} = \{f^*(e_i^2) : 12i-8, \quad 1 \le i \le n \ ; \ i$ ganjil$\}$
$A_{13} = \{f^*(e_i^2) : 12i-10, \ 1 \le i \le n \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{14} = \{f^*(e_i^3) : 12i-1, \quad 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ ganjil$\}$
$A_{15} = \{f^*(e_i^3) : 12i-5, \ 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{16} = \{f^*(e_i^4) : 12i-3, \ 1 \le i \le n-1 \, ; \ i$ ganjil$\}$
$A_{17} = \{f^*(e_i^4) : 12i-2, \ 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{18} = \{f^*(e_i^5) : 12i-2, \ 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ ganjil$\}$
$A_{19} = \{f^*(e_i^5) : 12i-3, \ 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{20} = \{f^*(e_i^6) : 12i, \quad 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ ganjil$\}$
$A_{21} = \{f^*(e_i^6) : 12i-4, \ 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{22} = \{f^*(e_i^7) : 12i-4, \ 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ ganjil$\}$
$A_{23} = \{f^*(e_i^7) : 12i, \quad 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{24} = \{f^*(e_i^8) : 12i-5, \ 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ ganjil$\}$
$A_{25} = \{f^*(e_i^8) : 12i-1, \ 1 \le i \le n-1 \ ; \ i$ genap$\}$ $A_{26} = \{f^*(e_j^9) : \ 12n-6+j, \ j=1 \ ; \ n$ genap$\}$
$A_{27} = \{f^*(e_j^9) : \ 12n-6+j, \ j=1 \ ; \ n$ ganjil$\}$ $A_{28} = \left\{f^*(e_j^9) : 12n-7+2j, \ 2 \le j \le t\right\}$

Gabungan himpunan-himpunan tersebut, $\bigcup_{i=1}^{28} A_i = f(V(\,D_n(C_3) \circledvee P_t)) \cup \left\{f^*(e) : e \in E\left(D_n(C_3) \circledvee P_t\right)\right\} = \{1,2,3,\dots,12n-6+2t\}$. Oleh karena itu, graf $D_n(C_3) \circledvee P_t$ dapat dilabeli secara super mean. Dengan demikian graf $D_n(C_3) \circledvee P_t$ adalah super mean, untuk $n \ge 3$.

Contoh :



Gambar 4 : Pelabelan Super Mean pada Graf $D_3(C_3) \circledvee P_5$

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan bukti-bukti pada Teorema 1 dan 2 diperoleh bahwa graf $D_n(C_3)$ dan graf $D_n(C_3) \circledvee P_t$ adalah super mean. Sebagai penutup, diberikan beberapa masalah terbuka, yaitu apakah graf $D_n(C_m)$ super mean untuk $m \ge 4$ dan $D_n(C_m) \circledvee P_t$ untuk $t \ge 1$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Cunningham, D. 2004. *Vertex-Magic*. Electronic Journal Of Undergraduated Mathematics. Vol. 9 : 2-20.

[2]. Gallian, J. A.. 2013. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics. Vol. 19. DS6.

[3]. Ramya., dan P. Jeyanti. 2012. *Super Mean Labeling of Some Classes of Graph*. International Journal Combinatorics. Vol.1 : 83-91.

[4]. Somasundaram, S., and Ponraj, R. 2003. *Mean Labelings of Graph*s. National Academy Science Letters. Vol 26 : 210–213.