

MEMBANGUN MODEL PENYEBARAN HAMA DAN PENYAKIT PADA BAWANG MERAH PALU (*Allium ascalonicum L.*)

M. Mutmainnah¹, R. Ratianingsih² dan N. Nacong³

^{1,2,3} Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako

Jalan Soekarno-Hatta Km. 09 Tondo, Palu 94118, Indonesia.

¹mhaznii@gmail.com, ²ratianingsih@yahoo.com, ³nasria_nacong@gmail.com

ABSTRACT

Caterpillar leaves (*spodoptera exigue*) and fungi *altenaria porri* are plant distractor organism that become a factor of some problems faced on onion (*alliumascalonicum l.*) cultivation. The objectives of this research is to govern a mathematical model of the pest and disease spread of Palu onion. The model divides the onion population into 6 sub populations are, a population of Palu onion that potentially be infected by pests and disease (S), a population of Palu onion that potentially infected by caterpillar leaves (I_H), a population of Palu onion that potentially infected by patches leaves (I_p), a population of Palu onion that is free of pest and disease (R). The other population to be considered to the model are a populations of caterpillar that potentially creates pests (U), a population of fungi that potentially creates disease (J). The constructed model is a nonlinear differensial system equations, that its stability is analyzed at every critical point using linearization method. There are three obtained critical points. The first one shows that the Palu onion population is free of pest and disease. That critical point is not stable, it means that all populations of caterpillar leaves, fungi *altenaria porri* and the Palu onion are extinct. The second critical point shows that the Palu onion population is free of pest. That critical point is stable under $\beta_1 > \beta_2$ requirement, it means that number of caterpillar leaves infection is not allowed to exceed the number of patches leaves disease. The third critical point shows that the Palu onion population is endemic. The analysis of the stability interpretes that both unstable critical points will not stay in the population, while the free pest critical point will remain.

Keywords : *Allium Ascalonicum L., Altenaria Porri, Linearization, Spodoptera Exigüe, Stability.*

ABSTRAK

Ulat daun (*spodoptera exigue*) dan jamur *altenaria porri* merupakan organisme pengganggu tumbuhan yang menjadi faktor dari beberapa masalah yang dihadapi dalam budidaya bawang merah (*Allium ascalonicum L.*). Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan model matematika penyebaran hama dan penyakit pada bawang merah Palu, dengan membagi menjadi 6 sub populasi, yaitu (U) sub populasi ulat yang berpotensi menyebarkan hama, (J) populasi jamur yang berpotensi menyebarkan penyakit, (S) populasi bawang merah Palu yang berpotensi terkena hama dan penyakit, (I_H) populasi bawang merah Palu yang terinfeksi hama ulat daun, (I_p) populasi bawang merah Palu yang terinfeksi penyakit bercak daun, (R) populasi bawang merah Palu yang bebas hama dan penyakit. Model yang dibangun berupa sistem persamaan differensial tak linear, kemudian dianalisa kestabilannya di setiap titik kritis dengan metode linearisasi. Dari hasil penelitian didapatkan tiga titik kritis. Pertama, titik kritis yang memperlihatkan bawang merah Palu bebas hama dan penyakit. Titik kritis tersebut tidak stabil sehingga seluruh populasi ulat daun, jamur *altenaria porri*, dan bawang merah Palu akan habis. Kedua, titik kritis

kedua memperlihatkan bawang merah Palu bebas hama. Titik kritis tersebut stabil dengan syarat $\beta_1 > \beta_2$ yang memberi arti bahwa tingkat serangan hama ulat daun tidak boleh melebihi tingkat serangan penyakit bercak daun. Ketiga, Titik kritis memperlihatkan bawang merah Palu yang endemik. Titik kritis tersebut tidak stabil yang memberi arti bahwa titik kritis tersebut akan ditinggalkan. Hasil analisa kestabilan tersebut disimpulkan bahwa, kedua titik kritis yang tidak stabil tersebut, tidak bersifat menetap. Sedangkan titik kritis bebas hama akan menetap dalam populasi.

Kata Kunci : *Allium Ascalonicum L.*, *Altenaria Porri*, Linearisasi, *Spodoptera Exigue*, Kestabilan.

I. PENDAHULUAN

Bawang merah Palu (*Allium ascalonicum L.*) merupakan salah satu komoditas unggulan yang memberikan kontribusi cukup tinggi terhadap perkembangan ekonomi wilayah, sehingga pengusaha budidaya bawang merah telah menyebar di hampir semua provinsi di Indonesia. Serangan Organisme Pengganggu Tumbuhan (OPT) yang semakin bertambah merupakan salah satu faktor dari beberapa masalah yang dihadapi dalam budidaya bawang merah.

Hama yang banyak menyerang tanaman bawang merah Palu adalah ulat daun (*spodoptera exigue*), sedangkan penyakitnya adalah bercak daun yang disebabkan oleh *Alternaria porri* Ell. Serangan ulat daun akan diikuti dengan serangan bercak daun mengakibatkan panen bawang merah Palu turun 40%. Ulat daun mulai menyerang tanaman setelah berumur kurang dari 14 hari, sedangkan bercak daun mulai menyerang setelah tanaman berumur 25 hari. Bawang merah Palu dipanen setelah berumur 65 sampai 70 hari (Maskar dkk, 1999).

Dalam penelitian ini, model yang dikaji menggambarkan dinamika perkembangan dari banyaknya populasi bawang merah yang rentan terhadap hama dan penyakit (*suscepted*), ke dalam populasi bawang merah yang terinfeksi hama dan penyakit (*infected*), dan populasi bawang merah yang telah bebas hama penyakit (*recovered*).

Salah satu model penyebaran penyakit yang sering dikenal model tipe *SIR* (*Suscepted – Infected – Recovered*) klasik (Kermack, Mc Kendrick, 1927). Dari model tersebut dibangun model baru yang melibatkan faktor hama dan penyakit bercak daun. Penyebaran hama dan penyakit tersebut dikaji melalui kestabilan titik kritis sistem yang mempresentasikannya. Kestabilan dari titik kritis dapat diperoleh dengan menggunakan metode linearisasi dan kriteria Routh-Hurwitz (Subiono, 2013).

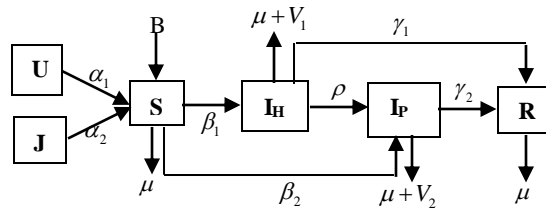
II. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan dengan mengkonstruksi model dinamik penyebaran hama dan penyakit pada bawang merah Palu yang dibangun dari kompartemen penyebarannya. Titik kritis dari sistem persamaan diferensial yang telah dibangun, selanjutnya dianalisa kestabilannya dengan melakukan linearisasi sistem disekitar titik kritis, sehingga menghasilkan persamaan karakteristik untuk menentukan nilai eigen (Anton, 1998). Nilai eigen diperoleh dari $\det(J - \lambda I) = 0$, dimana J adalah matriks Jacobi (Perko, 2001:102).

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Konstruksi Model

Penyebaran hama dan penyakit dalam penelitian ini dianalogikan sebagai masalah penyebaran penyakit menular. Penyebaran penyakit menular dapat digambarkan secara sistematis oleh model-model kompartemen *SIR* yang mengacu pada *susceptible, infected, dan recovered*. Penyebaran hama dipengaruhi oleh pertumbuhan populasi ulat daun sedangkan penyebaran penyakit dipengaruhi oleh jamur *altenaria porri*. Keduanya menginfeksi tanaman bawang dalam interval waktu yang berbeda. Berdasarkan fenomena tersebut dikonstruksi kompartemen penyebaran hama dan penyakit pada bawang merah kota Palu sebagai berikut



Gambar 1 : Konstruksi Model Penyebaran Hama dan Penyakit pada Bawang Merah Palu
Diperoleh sistem persamaannya sebagai berikut:

$$\frac{dU}{dt} = \psi_1 U \left(1 - \frac{U}{K}\right) \quad (1)$$

$$\frac{dJ}{dt} = \psi_2 J \left(1 - \frac{J}{K}\right) \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = S(B + \alpha_1 U + \alpha_2 J - \beta_1 I_H - \beta_2 I_P - \mu) \quad (3)$$

$$\frac{dI_H}{dt} = I_H (\beta_1 S - (\mu + V_1) - \rho - \gamma_1) \quad (4)$$

$$\frac{dI_P}{dt} = I_P (\beta_2 S - (\mu + V_2) - \gamma_2) + \rho I_H \quad (5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I_H + \gamma_2 I_P - \mu R \quad (6)$$

3.2. Menentukan Titik Kritis

Titik kritis dari sistem Persamaan (1) – (6) dapat diperoleh dengan meninjau pada keadaan stagnan, yaitu dengan menentukan $\frac{dU}{dt} = 0, \frac{dJ}{dt} = 0, \frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI_H}{dt} = 0, \frac{dI_P}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$

1. Titik kritis pertama

Titik kritis pertama yang menggambarkan kondisi populasi bawang merah Palu bebas hama dan penyakit $T_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

2. Titik Kritis kedua

Titik kritis kedua yang menggambarkan kondisi populasi bawang merah Palu bebas hama $T_2 = \left(K, K, \frac{\mu + V_2 + \gamma_2}{\beta_2}, 0, \frac{B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu}{\beta_2}, \frac{\gamma_2 (B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2 \mu} \right)$.

Eksistensi titik kritis T_2 , dapat tercapai jika U, J, S, I_H, I_P, R bernilai non negatif. Mengingat $U_2 = K, J_2 = K, S_2 = \frac{\mu + V_2 + \gamma_2}{\beta_2}$, dan $I_{P_2} = \frac{B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu}{\beta_2}$ yang non negatif, maka eksistensi bagi T_2 membutuhkan syarat $B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu > 0$ sehingga $\mu < B + K(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Syarat tersebut menginterpretasikan bahwa eksistensi T_2 terpenuhi jika tingkat kematian alaminya terbatas oleh faktor rekrutmen dari bawang merah Palu, laju infeksi hama, laju infeksi penyakit, dan daya tampung populasi bawang sebagai sumber makanan bagi ulat daun dan jamur *altenaria porri*.

3. Titik Kritis ketiga

Titik kritis ketiga yang menggambarkan kondisi populasi bawang merah terserang hama dan penyakit, $T_3 = \left(K, K, \frac{\mu + V_1 + \rho + \gamma_1}{\beta_1}, \frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{\beta_1(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}, \frac{-\rho(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)}, \frac{\gamma_1((B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)))}{\beta_1 \mu (\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} \right)$

Eksistensi titik kritis T_3 , tercapai jika U, J, S, I_H, I_P, R bernilai non negatif. Mengingat $U_3 = K, J_3 = K$, dan $S_3 = \frac{\mu + V_1 + \rho + \gamma_1}{\beta_1}$ bernilai positif, maka jaminan eksistensi T_3 dipenuhi jika I_{H_3}, I_{P_3} , dan R_3 yang bernilai non negatif. Agar I_{H_3}, I_{P_3} , dan R_3 tidak negatif, maka harus dipenuhi $(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)) > 0$. Sehingga disimpulkan bahwa syarat eksistensi bagi T_3 adalah $\mu < \frac{\beta_2(V_1 + \gamma_1) - \beta_1(V_2 + \gamma_2)}{\beta_1 - \beta_2}$ dan $\mu < B + K(\alpha_1 + \alpha_2)$. Syarat tersebut memberi arti bahwa tingkat kematian alami bawang merah Palu harus dibatasi.

3.3. Analisis Kestabilan Titik Kritis

3.3.1. Kestabilan Titik Kritis T_1

Titik kritis pertama adalah titik kritis yang menggambarkan keadaan populasi bawang merah palu yang bebas hama dan penyakit. Kestabilan di titik kritis tersebut diperoleh berdasarkan nilai eigen dari linearisasi sistem melalui matriks Jacobi yang dievaluasi pada $T_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ sehingga diperoleh

$$A_1 = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho - (\mu + V_1) - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & -\gamma_2 - (\mu + V_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{bmatrix}$$

Nilai eigen A_1 diperoleh dari $\det(A_1 - \lambda I) = 0$

$$(\psi_1 - \lambda)(\psi_2 - \lambda)(B - \mu - \lambda)(-\rho - \mu - V_1 - \gamma_1 - \lambda)(-\gamma_2 - \mu - V_2 - \lambda)(-\mu - \lambda) = 0$$

Mengingat $\lambda_1 = \psi_1$ dan $\lambda_2 = \psi_2$ maka kestabilan sistem di titik kritis T_1 dapat ditentukan dari kedua nilai eigen tersebut yang bernilai positif. Dapat disimpulkan bahwa T_1 adalah tidak stabil.

3.3.2. Kestabilan Titik Kritis T_2

Titik kritis kedua adalah titik kritis yang menggambarkan keadaan populasi bawang merah palu yang bebas hama. Mengingat titik kritis kedua $T_2 = \left(K, K, \frac{\mu + V_2 + \gamma_2}{\beta_2}, 0, \frac{B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu}{\beta_2}, \frac{\gamma_2 (B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2 \mu} \right)$ bukan titik kritis nol, maka analisa kestabilan titik kritis tersebut dilakukan dengan mentransformasi variabel $U, J, S, I_H, I_P,$ dan R terlebih dahulu, sehingga Persamaan (1) – (6) dianalisa di titik kritis $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ dalam sistem koordinat baru. Sehingga diperoleh persamaan baru dalam (Z, Y, X, I_H, W, T) :

$$a = \frac{dZ}{dt} = (K + Z) \left(\psi_1 - \frac{\psi_1 (K + Z)}{K} \right) \quad (7)$$

$$b = \frac{dY}{dt} = (K + Y) \left(\psi_2 - \frac{\psi_2 (K + Y)}{K} \right) \quad (8)$$

$$c = \frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu + V_2 + \gamma_2}{\beta_2} + X \right) \left(B + \alpha_1 (K + Z) + \alpha_2 (K + Y) - \beta_1 I_H - \beta_2 \left(\frac{B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu}{\beta_2} + W \right) - \mu \right) \quad (9)$$

$$d = \frac{dI_H}{dt} = I_H \left(\beta_1 \left(\frac{\mu + V_2 + \gamma_2}{\beta_2} + X \right) - (\mu + V_1) - \rho - \gamma_1 \right) \quad (10)$$

$$e = \frac{dW}{dt} = \left(\frac{B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu}{\beta_2} + W \right) \left(\beta_2 \left(\frac{\mu + V_2 + \gamma_2}{\beta_2} + X \right) - (\mu + V_2) - \gamma_2 \right) + \rho I_H \quad (11)$$

$$f = \frac{dT}{dt} = \gamma_1 I_H + \gamma_2 \left(\frac{B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu}{\beta_2} + W \right) - \mu \left(\frac{\gamma_2 (B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2 \mu} + T \right) \quad (12)$$

Selanjutnya dapat dibentuk matriks Jacobi dari Persamaan (7) – (12) yang di evaluasi dititik kritis $T_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ sehingga didapat:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1 (\mu + V_2 + \gamma_2)}{\beta_2} & \frac{\alpha_2 (\mu + V_2 + \gamma_2)}{\beta_2} & 0 & \frac{-\beta_1 (\mu + V_2 + \gamma_2)}{\beta_2} & -(\mu + V_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1 (\mu + V_2 + \gamma_2)}{\beta_2} - (\mu + V_1) - \rho - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{bmatrix}$$

Nilai eigen A_2 diperoleh dari $\det(A_2 - \lambda I) = 0$

$$(-\psi_1 - \lambda)(-\psi_2 - \lambda) \left(\frac{\beta_1 (\mu + V_2 + \gamma_2)}{\beta_2} - (\mu + V_1) - \rho - \gamma_1 - \lambda \right) (-\mu - \lambda) (a_0 \lambda^2 + a_2) = 0 \quad (6)$$

Dari Persamaan (6) diperoleh nilai eigen yaitu, $\lambda_1 = -\psi_1$, $\lambda_2 = -\psi_2$
 $\lambda_3 = \frac{\beta_1 (\mu + V_2 + \gamma_2)}{\beta_2} - \rho - \mu - V_1 - \gamma_1$, $\lambda_4 = -\mu$, dan $\lambda_{5,6} = \pm i \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$. Mengingat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ bernilai negatif, sedangkan λ_5 dan λ_6 memiliki bagian riil bernilai nol, maka kestabilan sistem

di titik T_2 ditentukan oleh nilai λ_3 . Sehingga syarat kestabilan untuk T_2 adalah $\lambda_3 < 0$, yaitu $\beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2) < \beta_2(\rho + \mu + V_1 + \gamma_1)$ yang memberikan $\mu < \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}(\rho + V_1 + \gamma_1)$.

Syarat tersebut memberikan arti bahwa tingkat kematian alami bawang merah Palu harus dibatasi. Syarat lain yang harus dipenuhi adalah $\beta_1 > \beta_2$ yang memberi arti tingkat serangan penyakit bercak daun tidak boleh melebihi tingkat serangan hama ulat daun.

3.3.3. Kestabilan Titik Kritis T_3

Titik kritis ketiga adalah titik kritis yang menggambarkan keadaan populasi bawang merah palu yang endemik. Seperti halnya titik kritis kedua, titik kritis ketiga

$$T_3 = \left(K, K, \frac{\mu + V_1 + \rho + \gamma_1}{\beta_1}, \frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{\beta_1(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}, \right. \\ \left. \frac{-\rho(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)}, \frac{\gamma_1((B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)))}{\beta_1 \mu (\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} \right)$$

bukan titik kritis nol, maka analisa kestabilan titik kritis tersebut dilakukan dengan mentransformasi variabel U, J, S, I_u, I_p , dan R terlebih dahulu. Sehingga diperoleh persamaan baru dalam (Z, Y, X, Q, W, T) :

$$a = \frac{dZ}{dt} = (K + Z) \left(\psi_1 - \frac{\psi_1(K + Z)}{K} \right) \quad (13)$$

$$b = \frac{dY}{dt} = (K + Y) \left(\psi_2 - \frac{\psi_2(K + Y)}{K} \right) \quad (14)$$

$$c = \frac{dX}{dt} = \left(\frac{\mu + V_1 + \rho + \gamma_1}{\beta_1} + X \right) (B + \alpha_1(K + Z) + \alpha_2(K + Y) - \beta_1 \left(\frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{\beta_1(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} + Q \right) - \beta_2 \left(\frac{-\rho(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)} + W \right) - \mu_3) \quad (15)$$

$$d = \frac{dQ}{dt} = \left(\frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{\beta_1(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} + Q \right) \left(\beta_1 \left(\frac{\mu + V_1 + \rho + \gamma_1}{\beta_1} + X \right) - (\mu + V_1) - \rho - \gamma_1 \right) \quad (16)$$

$$e = \frac{dW}{dt} = \left(\frac{-\rho(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)} + W \right) \left(\beta_2 \left(\frac{\mu + V_1 + \rho + \gamma_1}{\beta_1} + X \right) - (\mu + V_2) - \gamma_2 \right) + \rho \left(\frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{\beta_1(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} + Q \right) \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
f = \frac{dT}{dt} = & \gamma_1 \left(\frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{\beta_1(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} + Q \right) \\
& + \gamma_2 \left(\frac{-\rho(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)} + W \right) - \\
& \mu_3 \left(\frac{\gamma_1((B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)))}{\beta_1 \mu (\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} + T \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

Selanjutnya dapat dibentuk matriks Jacobi dari Persamaan (13)–(18) yang di evaluasi dititik kritis $T_3 = (0,0,0,0,0,0)$, sehingga diperoleh:

$$A_3 = \begin{bmatrix}
-\psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\alpha_1(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} & \frac{\alpha_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} & 0 & 0 & -(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) & \frac{-\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} \\
0 & 0 & \frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-\beta_2 \rho (B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)} & \rho & \frac{\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu
\end{bmatrix}$$

Nilai eigen A_3 diperoleh dari $\det(A_3 - \lambda I) = 0$, yaitu

$$\begin{aligned}
& (-\psi_1 - \lambda)(-\psi_2 - \lambda)(-\mu - \lambda) \left(\lambda^3 - \lambda^2 \left(\frac{\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} - (\mu + V_2) - \gamma_2 \right) - \right. \\
& \lambda \left(\frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} \right) \left(-(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) \right) - \\
& \lambda \left(\frac{-\beta_2 \rho (B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)} \right) \left(\frac{-\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} \right) - \\
& \left. \left(\frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} \right) (\rho) \left(\frac{-\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} \right) \left(-(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} - (\mu + V_2) - \gamma_2 \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Persamaan (19) dapat disederhanakan menjadi

$$(-\psi_1 - \lambda)(-\psi_2 - \lambda)(-\mu - \lambda)(a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3) = 0 \tag{20}$$

Persamaan (20) memberikan nilai negatif pada λ_1 , λ_2 dan λ_3 , sehingga kestabilan titik kritis T_3 ditentukan oleh persamaan karakteristik

$$(a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3) = 0 \tag{21}$$

Tanda dari nilai eigen yang diperoleh pada persamaan (21) ditentukan melalui polinomial berderajat tiga dalam λ pada persamaan (21) yang dinyatakan dalam Tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut.

Tabel 1 : Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & a_0 & a_2 \\ \lambda^2 & a_1 & a_3 \\ \lambda^1 & b_1 & b_2 \\ \lambda^0 & c_1 & \end{array}$$

Syarat kriteria Routh-Hurwitz memerlukan pemeriksaan terhadap setiap koefisien dan tidak adanya perubahan tanda pada kolom pertama. Mengingat $a_0 = 1$, maka perlu diperiksa $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, dan $c_1 > 0$. Mengingat $\beta_1, \beta_2, \mu, V_1, \rho, \gamma_1, V_2$, dan γ_2 adalah positif maka $a_1 = -\frac{\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1)}{\beta_1} - (\mu + V_2) - \gamma_2 < 0$. Sehingga menunjukkan terjadinya perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz. Disimpulkan bahwa T_3 adalah tidak stabil.

3.4. Simulasi

Simulasi model penyebaran hama dan penyakit pada bawang merah Palu dilakukan menggunakan perangkat lunak Maple13 dengan memberikan nilai – nilai awal kelompok populasi ulat (U) = 2224 ekor, populasi jamur (J) = 5560 daun, populasi bawang merah Palu yang rentan (S) = 4448 rumpun, populasi bawang merah Palu yang terinfeksi hama (I_H) = 1112 rumpun, populasi bawang merah Palu yang terinfeksi penyakit (I_P) = 556 rumpun, dan bawang merah Palu bebas hama dan penyakit (R) = 2780 rumpun. Dengan nilai – nilai parameternya yaitu, laju kelahiran ulat daun (ψ_1) = 158,85, laju kelahiran jamur (ψ_2) = 158,85, tingkat rekrutmen bawang merah Palu (B) = 68,43, laju infeksi hama ke bawang merah Palu yang rentan (α_1) = 0,5, laju infeksi jamur ke bawang merah Palu yang rentan (α_2) = 1,25, laju kematian alami bawang merah Palu (μ) = 0,015, transmisi hama ulat daun (β_1) = 0,25, transmisi penyakit bercak daun (β_2) = 0,125, laju transisi yang terinfeksi hama (ρ) = 0,5, kematian alami bawang merah Palu yang terinfeksi hama (V_1) = 0,071, kematian alami bawang merah Palu yang terinfeksi penyakit (V_2) = 0,016, laju penyembuhan bawang merah palu yang terinfeksi hama (γ_1) = 2,41, dan laju penyembuhan bawang merah palu yang terinfeksi penyakit (γ_2) = 4,82. Interval waktu pengamatan dibuat dalam tahun.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa, kestabilan pada titik kritis bawang merah Palu bebas hama dan penyakit yang diekspresikan sebagai $T_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ menunjukkan bahwa sistem tidak stabil. Titik kritis tersebut akan mengakibatkan seluruh populasi ulat daun, jamur *alternaria porri*, dan bawang merah Palu akan habis. Untuk kestabilan pada titik kritis bawang merah Palu bebas hama yang diekspresikan sebagai $T_2 = \left(K, K, \frac{\mu + V_2 + \gamma_2}{\beta_2}, 0, \frac{B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu}{\beta_2}, \frac{\gamma_2 (B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2 \mu} \right)$ menunjukkan bahwa sistem stabil dengan syarat $\mu < \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} (\rho + V_1 + \gamma_1)$ memberi arti tingkat serangan penyakit bercak daun tidak boleh melebihi tingkat serangan hama ulat daun. Sedangkan kestabilan pada titik kritis bawang merah Palu yang

endemik diekspresikan sebagai $T_3 = \left(K, K, \frac{\mu + V_1 + \rho + \gamma_1}{\beta_1}, \frac{(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}{\beta_1(\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))}, \frac{-\rho(B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)}{\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)}, \frac{\gamma_1((B + \alpha_1 K + \alpha_2 K - \mu)(\beta_2(\mu + V_1 + \rho + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2)))}{\beta_1 \mu (\beta_2(\mu + V_1 + \gamma_1) - \beta_1(\mu + V_2 + \gamma_2))} \right)$ menunjukkan bahwa sistem tidak stabil. Ketidak stabilan T_3 memberi arti bahwa titik kritis tersebut akan ditinggalkan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Anton, H., *Aljabar Linear Elementer: Terjemahan oleh Pantur Silaban*, Erlangga, 1998, Jakarta.
- [2]. Kermack, W. O. and McKendrick, A. G., *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, 1927, *Royal Society*, 115: 700-721.
- [3]. Maskar., Sumarni, A. Kadir., dan Chatidjah., *Pengaruh ukuran bibit dan jarak tanam terhadap hasil panen bawang merah varietas lokal Palu*, Balai Pengkajian Teknologi Pertanian Sulawesi Tengah, 1999, Palu, hlm. 51-56.
- [4]. Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd, Springer: 2001, New York.
- [5]. Subiono., *Sistem linear dan Kontrol Optimal*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2013, Surabaya.