Volume 08, Nomor 03: 159 — 164
Desember 2019

Natural Science
Journal of Science and Technology

Sifat-Sifat Representasi Indekomposabel

(The Properties of Indecomposable Representations)

Vika Yugi Kurniawan[1]

[1] Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret

Keywords: Morphism, Quiver, Indecomposable Representation, Direct Sum Representation

Abstract
A directed graph is also called as a quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, \mathrm{t})$ where Q_0 is a finite set of vertices, Q_1 is a set of arrows, and s, t are two maps from Q_1 to Q_0. A representation $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ of a quiver Q is an assignment of a vector space V_i to each vertex i of Q and a linear mapping f_α to each arrow. We denote by $V \oplus W$ the direct sum of representasions V and W of a quiver Q. A representation $\mathcal{R}$ is called indecomposable if $\mathcal{R}$ is not ishomorphic to a direct sum of non-zero representations. This paper study about the properties of indecomposable representations. These properties will be used to investigate the necessary and sufficient condition of indecomposable representations.

Kata kunci: Morfisma, Quiver, Representasi Indekomposabel, Representasi Jumlahan Langsung

Abstrak
Graf berarah sering disebut juga sebagai quiver Q yang merupakan pasangan 4-*tupel* (Q_0, Q_1, s, t) yang terdiri dari himpunan titik Q_0, himpunan panah Q_1, serta dua pemetaan $s, t : Q_1 \to Q_0$. Untuk suatu quiver Q, representasi $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ diperoleh dengan cara menyematkan ruang vektor V_i pada setiap titik i dari quiver Q dan pemetaan linier f_α pada setiap panah di Q. Jika V dan W merupakan representasi dari quiver Q, maka dapat didefinisikan suatu representasi baru yang disebut sebagai jumlahan langsung dari V dan W, dinotasikan dengan $V \oplus W$. Suatu representasi $\mathcal{R}$ dari quiver Q dikatakan indekomposabel apabila $\mathcal{R}$ tidak isomorfis dengan jumlahan langsung dari dua buah representasi tak nol. Pada makalah ini, dibahas sifat-sifat serta syarat perlu dan cukup dari representasi indekomposabel.

* Coresponding Author :
vikayugi@staff.uns.ac.id
(ph/fax: +62-856-2528-707)

Latar Belakang

Dalam beberapa dekade terakhir ini, banyak peneliti yang menggunakan pendekatan teori graf untuk mempermudah dalam mempelajari teori aljabar, begitu juga sebaliknya. Salah satu kajian yang berkembang adalah representasi quiver. Kajian tentang representasi quiver sudah dimulai pada awal tahun tujuh puluhan. Menurut Barot (2006), belakangan ini banyak dipelajari sejumlah hubungan antara representasi quiver dengan beberapa topik aljabar, seperti aljabar Hall, aljabar Lie, grup kuantum dan juga aljabar cluster. Kajian Steve (2015) menunjukkan aplikasi representasi quiver pada bidang analisis data. Berikutnya banyak peneliti yang melakukan kajian lebih mendalam tentang teori representasi quiver, antara lain Weist (2015), David (2015), Kurniawan (2016) dan Riedtmann (2016). Belakangan ini bahkan banyak yang mengaitkan penelitian representasi quiver dengan berbagai topik aljabar lain seperti Enomoto dan Watatani (2017) membahas representasi Hilbert dari quiver, Lovanov (2018) membahas representasi *comodul* dari suatu aljabar, serta Garver dan McConville (2019) yang membahas representasi Aljabar *Tiling*.

Quiver Q merupakan graf berarah yang dipandang sebagai pasangan 4-*tupel* (Q_0, Q_1, s, t) yang terdiri dari himpunan titik Q_0, himpunan panah Q_1, serta dua pemetaan $s, t : Q_1 \to Q_0$. Selanjutnya $s(\alpha), t(\alpha) \in Q_0$ berturut-turut disebut sebagai sumber dan target dari panah $\alpha \in Q_1$. Untuk suatu quiver Q, representasi $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ diperoleh dengan cara menyematkan ruang vektor V_i pada setiap titik i dari quiver Q dan pemetaan linier f_α pada setiap panah di Q. Representasi $\mathcal{S} = (W_i, g_\alpha)$ menjadi subrepresentasi dari $\mathcal{R}$ jika untuk setiap $i \in Q_0$, W_i adalah subruang dari V_i, dan untuk setiap $\alpha \in Q_1$, pemetaan linier $g_\alpha : W_{s(\alpha)} \to W_{t(\alpha)}$ merupakan pemetaan yang sama dengan $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ yang dibatasi pada $W_{s(\alpha)}$. Jika V dan W merupakan dua representasi berbeda dari quiver Q, maka dapat didefisnisikan suatu representasi baru yang disebut sebagai jumlahan langsung dari V dan W, dan dinotasikan dengan $V \oplus W$. Suatu representasi $\mathcal{R}$ dari quiver Q dikatakan indekomposabel apabila $\mathcal{R}$ tidak isomorfis dengan suatu jumlahan langsung dari dua buah representasi yang tak nol. Pada makalah ini diselidiki sifat-sifat serta syarat perlu dan cukup dari representasi indekomposabel.

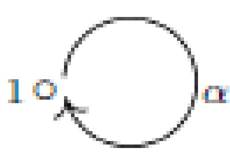
Representasi Quiver dan Isomorfisma Representasi

Bagian ini menjelaskan pengertian beserta contoh dari representasi quiver dan isomorfisma representasi.

Definisi 2.1 (Derksen and Weymen, 2005) ***Representasi*** *$\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ dari suatu quiver Q adalah himpunan ruang vektor $\{V_i \mid i \in Q_0\}$ bersama dengan himpunan pemetaan linier $\{f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)} \mid \alpha \in Q_1\}$, dimana Q_0 dan Q_1 merupakan himpunan titik dan himpunan panah dari Q.*

Berikut adalah contoh dari representasi quiver.

Contoh 2.2 Diberikan quiver Q dengan sebuah titik dan sebuah panah yang disebut sebagai loop sebagai berikut.



Untuk quiver Q tersebut dapat didefinisikan sebuah representasi $R = (V_1, f_\alpha)$ dengan $V_1 = K^n$ dan $f_\alpha = M_n$. Notasi K^n merupakan ruang vektor berdimensi n dan M merupakan matriks persegi berukuran $n \times n$

Selanjutnya akan diberikan definisi dari morfisma representasi beserta contohnya.

Definisi 2.3 (Brion, 2008) *Diketahui $V = (V_i, f_\alpha)$ dan $W = (W_i, g_\alpha)$ representasi dari quiver Q.* ***Morfisma representasi*** *$\varphi : V \to W$ adalah koleksi pemetaan-pemetaan linier $\{\varphi_i : V_i \to W_i | i \in Q_0\}$ sedemikian sehingga diagram berikut*

$$\begin{tikzcd} V_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\varphi_{t(\alpha)}"] \\ W_{s(\alpha)} \arrow[r, "g_\alpha"'] & W_{s(\alpha)} \end{tikzcd}$$

berlaku komutatif untuk semua $\alpha \in Q_1$, atau dengan kata lain $\varphi_{t(\alpha)} f_\alpha = g_\alpha \varphi_{s(\alpha)}$. Berikutnya, jika φ_i punya invers untuk setiap $i \in Q_0$, maka morfisma φ disebut ***isomorfisma*** *dan kedua representasi V dan W dikatakan* ***isomorfis****.*

Berikut ini merupakan contoh dari morfisma representasi.

Contoh 2.4 Diberikan quiver kronecker 1-panah K_1 yaitu quiver dengan dua buah titik dan sebuah panah seperti pada gambar berikut

$$1 \circ \xrightarrow{\alpha} \circ\, 2$$

Dari quiver tersebut dapat didefinisikan representasi $W^A = (W_i^A, f_\alpha)$ dengan $W_1^A = K^m$, $W_2^A = K^n$, dan $f_\alpha = A_{n\times m}$. Didefinisikan juga representasi lain $W^B = (W_i^B, g_\alpha)$ dengan $W_1^B = K^m$, $W_2^B = K^n$, dan $g_\alpha = B_{n\times m}$. Dari representasi W^A dan W^B dapat didefinisikan morfisma representasi $\varphi : W^A \to W^B$ dengan pemetaan linier $\varphi_1 : K^m \to K^m$ dan $\varphi_2 : K^n \to K^n$ yang memenuhi $\varphi_2 A = B \varphi_1$.

Representasi Indekomposabel

Jika V dan W merupakan representasi dari suatu quiver Q, maka dapat didefinisikan suatu representasi baru yang disebut sebagai jumlahan langsung dari V dan W, dan dinotasikan dengan $V \oplus W$. Suatu representasi $\mathcal{R}$ dari Q dikatakan indekomposabel apabila $\mathcal{R}$ tidak isomorfis dengan suatu jumlahan langsung dari dua representasi yang tak nol. Pada bagian ini akan dibahas tentang representasi indekomposabel beserta contoh dan sifat-sifatnya. Berikut akan diberikan definisi dari representasi jumlahan langsung yang akan digunakan untuk mendefinisikan representasi dekomposabel dan indekomposabel.

Definisi 3.1 *Jika* $V = (V_i, f_\alpha)$ *dan* $W = (W_i, g_\alpha)$ *merupakan representasi-representasi dari quiver* Q*, maka* $V \oplus W = (\mathcal{U}_i, h_\alpha)$ *dikatakan* ***representasi jumlahan langsung****, dengan:*

(i) $\mathcal{U}_i = V_i \oplus W_i$ *untuk setiap* $i \in Q_0$*, dan*

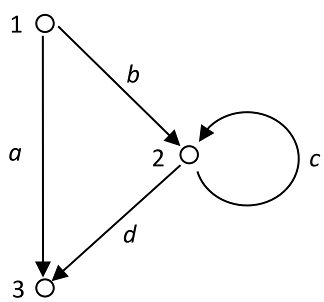
(ii) $h_\alpha : V_{s(\alpha)} \oplus W_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)} \oplus W_{t(\alpha)}$ *yang didefinisikan oleh matriks* $\begin{pmatrix} f_\alpha & 0 \\ 0 & g_\alpha \end{pmatrix}$*.*

Dengan pengertian representasi jumlahan langsung di atas, sebuah representasi dikatakan dekomposabel jika dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari dua representasi lain yang tak nol. Jika tidak demikian, maka representasi dikatakan indekomposabel.

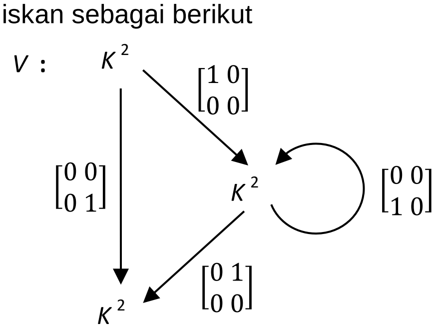
Definisi 3.2 *Sebuah representasi* $\mathcal{R}$ *dari quiver* Q *dikatakan* ***dekomposabel*** *jika* $\mathcal{R} \cong \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$ *dengan* $\mathcal{S}$ *dan* $\mathcal{T}$ *merupakan representasi tak nol dari* Q. *Sebuah representasi tak nol dikatakan* ***indekomposabel*** *jika representasi tersebut tidak dekomposabel.*

Untuk lebih memahami pengertian dari kedua representasi yang telah didefinisikan di atas, berikut akan diberikan contoh dari representasi dekomposabel dan indekomposabel.

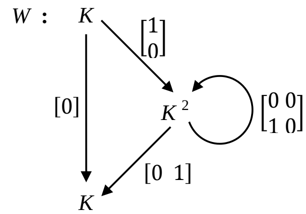
Contoh 3.3 Diberikan quiver Q seperti pada gambar berikut

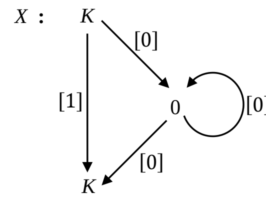


Didefinisikan representasi $V = (V_i, f_\alpha)$ dari quiver Q dengan V_i adalah ruang vektor berdimensi dua (K^2) untuk $i = 1,2,3$ dan f_a, f_b, f_c, f_d berturut-turut adalah pemetaan linier yang direpresentasikan oleh matriks $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Lebih jelasnya representasi V dapat dituliskan sebagai berikut



Apabila diberikan representasi $W = (W_i, g_\alpha)$ dan $X = (X_i, h_\alpha)$ sebagai berikut





maka dapat dilihat bahwa representasi V isomorfis dengan jumlahan langsung representasi $W \oplus X$, karena $V_i = W_i \oplus X_i$ untuk setiap $i \in Q_0$, dan $f_\alpha : W_{s(\alpha)} \oplus X_{s(\alpha)} \to W_{t(\alpha)} \oplus X_{t(\alpha)}$ dapat dinyatakan dengan matriks $\begin{pmatrix} g_\alpha & 0 \\ 0 & h_\alpha \end{pmatrix}$. Dengan demikian V merupakan representasi dekomposabel.

Contoh 3.4 Diberikan quiver Q yang memiliki dua buah titik dan sebuah panah seperti pada gambar berikut

$$1 \circ \xrightarrow{a} \circ\, 2$$

Perhatikan bahwa Q memiliki tiga representasi indekomposabel yaitu representasi $U = (U_i, f_\alpha)$ dengan $U_1 = K, U_2 = 0, f_a = 0$, representasi $V = (V_i, g_\alpha)$ dengan $V_1 = 0, V_2 = K, g_a = 0$, dan representasi $W = (W_i, h_\alpha)$ dengan $W_1 = K, W_2 = K, h_a = 1$,

atau dapat disajikan dalam bentuk gambar sebagai berikut

$$U : K \xrightarrow{0} 0 \qquad V : 0 \xrightarrow{0} K \qquad W : K \xrightarrow{1} K$$

Jelas bahwa ketiga representasi U, V dan W tidak isomorfis dengan jumlahan langsung dari dua representasi tak nol. Hal tersebut bisa dilihat dari ruang vektor masing-masing representasi yang maksimal hanya berdimensi satu. Jelas bahwa ruang vektor tersebut tidak dapat dinyatakan sebagai jumlahan langsung dari dua buah ruang vektor yang tak nol.

Untuk memahami himpunan endomorfisma dari suatu representasi V, selanjutnya akan diulas beberapa sifat dari morfisma representasi. Jika diberikan dua buah representasi dari suatu quiver Q yaitu $V = (V_i, f_\alpha)$ dan $W = (W_i, g_\alpha)$, maka dapat didefiniskan sebuah morfisma representasi dari V ke W. Morfisma representasi $\varphi : V \to W$ merupakan koleksi pemetaan linier $\{\varphi_i : V_i \to W_i | i \in Q_0\}$ sedemikian hingga untuk semua $\alpha \in Q_1$ berlaku $\varphi_{t(\alpha)} f_\alpha = g_\alpha \varphi_{s(\alpha)}$. Himpunan morfisma-morfisma dari representasi V ke representasi W dinotasikan dengan $\mathrm{Hom}(V, W) = \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ morfisma representasi}\}$. Dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa $\mathrm{Hom}(V, W)$ merupakan ruang vektor atas lapangan K.

Dua buah morfisma $\varphi : U \to V$ dan $\psi : V \to W$ dapat dikomposisikan menjadi sebuah morfisma $\psi\varphi = \{(\psi_i\varphi_i): U \to W \mid i \in Q_0\}$. Apabila diambil $W = V$, maka himpunan dari endomorfisma $V \to V$ yang dinotasikan dengan $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ juga merupakan sebuah K-ruang vektor.
Berikutnya akan diberikan beberapa proposisi yang menunjukkan kaitan antara representasi yang berdimensi hingga V dengan suatu endomorfisma $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Proposisi-proposisi berikut akan sangat bermanfaat untuk membuktikan syarat perlu dan cukup dari representasi indekomposabel.

Proposisi 3.5 *Diberikan sebuah ruang vektor berdimensi hingga V. Untuk setiap endomorfisma $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ terdapat bilangan bulat positif n sedemikian hingga untuk setiap $m \geq n$ berlaku $\varphi^m(V) = \varphi^n(V)$.*

Bukti
Diketahui ruang vektor V berdimensi hingga, misalkan $\dim V = r$. Berarti V dibangun oleh sebanyak r elemen, katakan $V = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$. Karena φ endomorfisma maka diperoleh

$$\varphi(V) = \langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_r) \rangle.$$

Ada dua kemungkinan himpunan pembangun $\varphi(V)$, yaitu $\langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_r) \rangle$ bebas linier atau tidak bebas linier. Jika $\langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_r) \rangle$ bebas linier maka diperoleh $\dim \varphi(V) = r$ sehingga $\varphi(V) = V$. Apabila $\langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_r) \rangle$ tidak bebas linier, diambil sejumlah s elemen yang bebas linier. Tanpa mengabaikan keumuman, katakan $\varphi(V) = \langle \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_s) \rangle$, akan diperoleh

$$\varphi\big(\varphi(V)\big) = \varphi^2(V) = \langle \varphi^2(a_1), \dots, \varphi^2(a_s) \rangle.$$

Jika $\langle \varphi^2(a_1), \dots, \varphi^2(a_s) \rangle$ bebas linier maka $\dim \varphi^2(V) = s$ sehingga $\varphi^2(V) = \varphi(V)$. Jika $\langle \varphi^2(a_1), \dots, \varphi^2(a_s) \rangle$ tidak bebas linier maka proses diulang. Karena $\dim V$ berhingga maka suatu saat akan ditemukan bilangan n sedemikian hingga untuk setiap $m \geq n$ berlaku $\varphi^m(V) = \varphi^n(V)$. ■

Sebelum diberikan lagi sebuah proposisi yang digunakan untuk membuktikan sifat utama, berikut akan diberikan terlebih dahulu definisi kernel dan image dari suatu morfisma.

Definisi 3.6 *Diberikan dua buah representasi V dan W dari suatu quiver Q yang sama, dan sebuah morfisma $\varphi = \{\varphi_i : V_i \to W_i \mid i \in Q_0\}$.* ***Kernel*** *dari morfisma φ merupakan subrepresentasi $V' = (V_i', f_\alpha')$ dari V sedemikian hingga $\varphi_i(V_i) = 0$ untuk setiap $i \in Q_0$. Sedangkan* ***image*** *dari morfisma φ merupakan subrepresentasi $W' = (W_i', g_\alpha')$ dari W sedemikian hingga $W_i' = \varphi_i(V_i)$ untuk setiap $i \in Q_0$.*

Selanjutnya kernel dan image dari morfisma $\varphi : V \to W$ dinotasikan dengan $\mathrm{Ker}\,\varphi$ dan $\mathrm{Im}\,\varphi$. Untuk lebih memahami definisi dari kernel dan image suatu morfisma, berikut akan diberikan sebuah contoh.

Contoh 3.7 Diberikan sebuah quiver dengan dua buah titik dan sebuah panah seperti pada gambar berikut

$$1 \circ \xrightarrow{\ \alpha\ } \circ\, 2$$

Didefinisikan representasi $V = (V_i, f_\alpha)$ dengan $V_1 = K^2$, $V_2 = K^2$, dan $f_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, atau bisa digambarkan sebagai berikut

$$V: \quad K^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} K^2$$

Didefinisikan juga representasi lain $W = (W_i, g_\alpha)$ dengan $W_1 = K$, $W_2 = K$, dan $g_\alpha = 1$.

$$W: \quad K \xrightarrow{\ 1\ } K$$

Dari representasi V dan W dapat didefinisikan morfisma representasi φ dari V ke W, yaitu $\varphi = \{\varphi_i : V_i \to W_i \mid i \in Q_0\}$ dengan pemetaan linier $\varphi_1 = [1 \quad 0] : K^2 \to K$ dan $\varphi_2 = [1 \quad 0] : K^2 \to K$ sehingga $\varphi_2 f_\alpha = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0] = 1[1 \quad 0] = g_\alpha \varphi_1$.
Morfisma φ dapat dilihat seperti gambar berikut

$$\begin{tikzcd}
K^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"] \arrow[d, "{[1 \quad 0]}"'] & K^2 \arrow[d, "{[1 \quad 0]}"] \\
K \arrow[r, "1"] & K
\end{tikzcd}$$

Perhatikan bahwa $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_2 = \{(0, k) \mid k \in K\}$, sehingga $\mathrm{Ker}\,\varphi = V' = (V_i', f_\alpha')$ dengan $V_1' = V_2' = \{(0, k) \mid k \in K\}$ dan $f_\alpha' = f_\alpha$. Perhatikan juga bahwa $\mathrm{Im}\,\varphi_1 = \mathrm{Im}\,\varphi_2 = K$, sehingga $\mathrm{Im}\,\varphi = W' = (W_i', g_\alpha')$ dengan $W_1' = W_2' = K$ dan $g_\alpha' = g_\alpha$ atau dengan kata lain $\mathrm{Im}\,\varphi = W$.
Pada representasi $V = (V_i, f_\alpha)$ dari suatu quiver Q, terdapat sebanyak $|Q_0|$ ruang vektor V_i. Dengan Proposisi 3.5, untuk setiap ruang vektor V_i terdapat bilangan bulat positif n_i sedemikian hingga untuk setiap

$m \geq n_i$ berlaku $\varphi^m(V_i) = \varphi^{n_i}(V_i)$. Dipilih bilangan bulat n_i terbesar, katakan n, maka untuk setiap endomorfisma $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ dapat ditemukan bilangan bulat positif n sedemikian hingga untuk setiap $m \geq n$ berlaku $\varphi^m(V) = \varphi^n(V)$.

Lemma 3.8 *Diberikan suatu representasi tak nol berdimensi hingga V dan sebuah endomorfisma φ.*

(1) *Untuk suatu bilangan bulat positif n, diperoleh $V = \mathrm{Im}\,\varphi^n \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi^n$.*
(2) *Jika V indekomposabel, maka φ memenuhi salah satu kondisi yaitu automorfisma atau nilpoten.*

Bukti

(1) Diketahui φ merupakan endomorfisma dari V. Karena V berdimensi hingga, maka terdapat bilangan bulat positif n sedemikian hingga $\varphi^m(V) = \varphi^n(V)$ untuk semua $m \geq n$, termasuk $m = 2n$. Tulis $\psi = \varphi^n$, artinya untuk setiap $v \in V_i$ dengan $i \in Q_0$, terdapat sebuah elemen $v' \in V_i$ sedemikian hingga $\psi(v) = \psi^2(v')$. Perhatikan bahwa
$$\psi\big(v - \psi(v')\big) = \psi(v) - \psi^2(v') = 0,$$
sehingga $v - \psi(v') \in \mathrm{Ker}\,\psi$.
Diperoleh
$$v = \psi(v') + \big(v - \psi(v')\big) \in \mathrm{Im}\,\psi + \mathrm{Ker}\,\psi.$$
Jadi, $V = \mathrm{Im}\,\psi + \mathrm{Ker}\,\psi$.
Selanjutnya diambil sebarang $v \in \mathrm{Im}\,\psi \cap \mathrm{Ker}\,\psi$, maka $v' \in V$ sedemikian hingga $v = \psi(v')$ dan $\psi(v) = \psi^2(v') = 0$. Perhatikan bahwa $\psi^2(v') = 0$ berakibat $\psi^2(v') = \psi(v') = v = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $V = \mathrm{Im}\,\psi \oplus \mathrm{Ker}\,\psi$ atau dengan kata lain $V = \mathrm{Im}\,\varphi^n \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi^n$.

(2) Karena $\dim_{\mathrm{K}} V$ berhingga, untuk setiap endomorfisma φ dari V terdapat bilangan asli n sedemikian hingga $\varphi^n(V) = \varphi^{n+1}(V)$. Tulis $\varphi^n = \psi$. Diperoleh $V = \mathrm{Im}\,\psi \oplus \mathrm{Ker}\,\psi$. Karena diketahui V indekomposabel maka diperoleh $\mathrm{Im}\,\psi = \{0\}$ atau $\mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$. Jika $\mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$ maka $V = \mathrm{Im}\,\psi$, akibatnya ψ surjektif sehingga φ surjektif (karena $\varphi(V) \supseteq \varphi^2(V) \supseteq \cdots \supseteq \varphi^n(V) = \psi(V) = V$). Karena $\mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$ diperoleh juga $\psi(V)$ injektif sehingga φ juga injektif (karena $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^n = \mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$). Dengan demikian $\varphi(i)$ bijektif untuk semua i, sehingga φ mempunyai invers. Jika $\mathrm{Im}\,\psi = \psi(V) = 0$, maka $\varphi^n(V) = 0$ sehingga diperoleh φ nilpoten. Hal ini menunjukkan bahwa setiap endomorfisma selalu mempunyai invers (automorfisma) atau nilpoten. ∎

Setelah diberikan beberapa lemma dan proposisi yang terkait dengan representasi indekomposabel dan aljabar $\mathrm{End}(V)$, berikut akan diberikan sebuah lemma yang menyatakan syarat perlu dan cukup dari suatu representasi indekomposabel. Lemma berikut mengacu pada Krause (2007).

Lemma 3.9 (Lemma Fitting) *Diberikan sebuah quiver Q, dan V merupakan representasi tak nol berdimensi hingga dari Q. Representasi V indekomposabel jika dan hanya jika $\mathrm{End}(V)$ lokal.*

Bukti

($\Longrightarrow$) Diberikan V indekomposabel dan diambil sebarang $\varphi, \varphi' \in \mathrm{End}(V)$. Misalkan $\varphi + \varphi'$ mempunyai invers, katakan $\rho(\varphi + \varphi') = 1_V$. Dari persamaan tersebut, diperoleh $\rho\varphi + \rho\varphi' = 1_V$, sehingga $\rho\varphi' = 1_V - \rho\varphi$.
Jika φ tidak mempunyai invers maka $\rho\varphi$ juga tidak mempunyai invers, sehingga (dengan Lemma 4.4.13) diperoleh $\rho\varphi$ nilpoten, katakan $(\rho\varphi)^n = 0$.
Perhatikan persamaan
$$(1_V - \rho\varphi)(1_V + \rho\varphi + \cdots + (\rho\varphi)^{n-1}) = 1_V - (\rho\varphi)^n = 1_V.$$
Dengan demikian $\rho\varphi' = 1_V - \rho\varphi$ mempunyai invers, akibatnya φ' juga mempunyai invers. Sehingga terbukti bahwa $\mathrm{End}(V)$ lokal.
($\Longleftarrow$)
Sebaliknya, diandaikan bahwa V tidak indekomposabel, katakan $V \cong V' \oplus V''$, dengan V' dan V'' tak nol. Perhatikan bahwa endomorfisma $e' = \begin{bmatrix} 1_{V'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $e'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{V''} \end{bmatrix}$ keduanya tidak mempunyai invers tetapi $1_V = e' + e''$, sehingga $\mathrm{End}(V)$ tidak lokal. Terjadi kontradiksi, dengan demikian terbukti bahwa V indekomposabel.

Selain yang diberikan pada lemma di atas, ada satu sifat penting lagi dari representasi indekomposabel. Apabila K merupakan lapangan yang tertutup secara aljabar, maka setiap endomorfisma dari V dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari endomorfisma yang lain dengan suatu kelipatan identitas dari $\mathrm{End}(V)$. Untuk mempermudah dalam pembuktian sifat tersebut, terlebih dahulu diberikan proposisi sebagai berikut.

Proposisi 3.10 *Diberikan sebuah quiver Q, dan V merupakan representasi tak nol berdimensi hingga dari Q. Lapangan K tertutup secara aljabar. Jika V indekomposabel, maka untuk setiap endomorfisma φ*

selalu dapat ditemukan $a \in K$ sedemikian hingga $\varphi - a1_V$ tidak mempunyai invers.

Bukti

Andaikan terdapat $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in K$ bentuk $\varphi - a1_V$ mempunyai invers. Karena V indekomposabel maka $\mathrm{End}(V)$ lokal sehingga untuk setiap $\pi \in \mathrm{End}(V)$ salah satu dari π atau $1_V - \pi$ tidak mempunyai invers. Dengan demikian diperoleh

$$1_V - (\varphi - a1_V) = (1+a)1_V - \varphi = -(\varphi - (1+a)1_V)$$

tidak mempunyai invers, sehingga $\varphi - (1+a)1_V$ juga tidak mempunyai invers. Padahal $1 + a \in K$, terjadi kontradiksi dengan untuk setiap $a \in K$ bentuk $\varphi - a1_V$ mempunyai invers. ■

Berdasarkan sifat-sifat yang telah dibuktikan pada lemma dan proposisi di atas, berikut diberikan teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup dari representasi indekomposabel.

Teorema 3.11 *Diberikan sebuah quiver Q, dan V merupakan representasi tak nol berdimensi hingga dari Q. Representasi V indekomposabel jika dan hanya jika setiap endomorfisma dari V dapat ditulis sebagai jumlahan dari suatu endomorfisma nilpoten dengan suatu kelipatan dari indentitas.*

Bukti

Jika V indekomposabel, maka untuk setiap endomorfisma φ selalu dapat ditemukan $a \in K$ sedemikian hingga $\varphi - a1_V$ tidak mempunyai invers dan berakibat $\varphi - a1_V$ nilpoten. Hal ini menunjukkan bahwa setiap endomorfisma dari V dapat ditulis dalam bentuk $a1_V + \psi$ dengan $a \in K$ dan ψ nilpoten.

Sebaliknya diandaikan jika V dekomposabel, maka endomorfisma $e' = \begin{bmatrix} 1_{V'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $e'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{V''} \end{bmatrix}$ keduanya tidak k dapat ditulis dalam bentuk tersebut.

Diandaikan terdapat $a \in K$ dan $\psi \in \mathrm{End}(V)$ yang nilpoten sedemikian hingga $e' = a1_V + \psi$. Perhatikan bahwa

$$e' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \psi,$$

sehingga diperoleh

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}.$$

Jelas bahwa bentuk $\begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ tidak mungkin nilpoten. Terjadi kontradiksi dengan ψ nilpoten. Dengan demikian terbukti bahwa V indekomposabel.

Daftar Pustaka

Barot, M., 2006, *Representations of Quivers*, *Notes for The ICTP-Conference*, Instituto de Matmáticas Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Mexico.

Brion, M., 2008*, Representations of Quivers, Notes de l'école d'été "Geometric Methods in Representation Theory",* Grenoble.

David A. Nadler, 2015, Cyclic symmetries of A_n-quiver representations. *Advances in Mathematics,* 269: 346-363.

Derksen, H., and Weyman, J., 2005, Quiver Representations. *Notice of The AMS* Volume, 52(2): 200 – 206

Enomoto, M., and Watatani, Y., 2017, Unbounded Strongly Irreducible Operators and Transitive Representations of Quivers on Infinite-Dimensional Hilbert Spaces. *RIMS Kokyuroku*, 2033: 147-15.

Garver, A., and, McConville, T., 2019, Oriented Flip Graphs, Noncrossing Tree Partitions, and Representation Theory of Tiling Algebras. *Glasgow Math. Journal.* 62: 147-182.

Iovanoc, M.C., 2018, The Tame-Wild Dichotomy Conjecture for Infinite Dimensional Algebras. https://arxiv.org/ pdf/1803.00173 (*diunduh pada tanggal 20 Juni 2019*).

Krause, H., 2007, *Representations of Quivers via Reflection Functor*, Institut Fur Mathematik, Universitat Paderborn, Paderborn, Germany.

Kurniawan, V.Y., 2016, Sifat-sifat Representasi Quiver Sederhana. *Jurnal MIPA*, 39 (2): 164-170.

Riedtmann C., 2016, Explicit description of generic representations for quivers of type $\mathbb{A}_n$ or $\mathbb{D}_n$. *Journal of Algebra*, 52: 474 – 486.

Steve Y. Oudot, 2015, *Persistence Theory: From Quiver Representations to Data Analysis (Mathematical Surveis and Monographs),* American Mathematical Society, United State of America.

Weist T., 2015, On the recursive construction of indecomposable quiver. *Journal of Algebra, 443*: 49 – 74.