



PELABELAN TOTAL SISI AJAIB SUPER (TSAS) PADA GABUNGAN GRAF ULAT BULU DAN BIPARTITE LENGKAP

I W. Sudarsana¹, Fitria² and S. Musdalifah³

^{1,2,3} Combinatorial and Applied Mathematics Research Group, Tadulako University
Jalan Sukarno-Hatta Km. 9 Palu 94118, Indonesia

¹ sudarsanaiwayan@yahoo.co.id

² fitria_matematika@yahoo.co.id

³ Selvymusdalifah@yahoo.com

ABSTRACT

An (a, d) edge anti-magic total labelling, (a, d) -EAMT, on graph $G(V, E)$ with p vertices and q edges is bijektion $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$, which has a set of edge weights $W = \{b(e) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) \mid \forall e = xy \in E(G)\} = \{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\}$ with $a > 0$ and $d \geq 0$. A (a, d) super edge anti-magic total labelling λ , (a, d) -SEAMT, if the vertex set of G obtain the smallest labels $\lambda(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$. An (a, d) -EAMT (SEAMT) labelling λ is called EMT (SEMT) labelling if $d = 0$ and $k = a$. Furthermore, k is called the magic constant. A graph G is said EMT, SEMT, (a, d) -EAMT and (a, d) -SEAMT if there is EMT, SEMT, (a, d) -EAMT and (a, d) -SEAMT labelling on graph G , respectively. In this paper, we showed that the union of caterpillars and complete bipartite graph are SEAMT and SEMT, especially for $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$

has $(11n - 2, 0)$ -SEAMT and $(5n + 3, 2)$ -SEAMT with $n \geq 6$; graph $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ has $(6n + 7, 0)$ -SEAMT and $(2n + 9, 2)$ -SEAMT for $n \geq 3$; and graph $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ has $(3n^2 + n + 1, 0)$ -SEAMT and $(n^2 + 2n + 3, 2)$ -SEAMT with $f_1 = f_2 = 0$; $f_{2t} = f_{2n} = 0$; $f_3 = f_{2n-2} = 1$; $f_{2n-1} = n - 4$; $f_{2n-3} = n - 2$; $f_{2l+3} = n - 1$ where $t = 2, 3, \dots, n - 2$ and $l = 1, 2, \dots, n - 4$ for $n \geq 5$. Thus, graph $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$ is SEMT with $k = 11n - 2$ for $n \geq 6$; graph $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ also SEMT with $k = 6n + 7$ for $n \geq 3$; as well graph $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ is SEMT with $k = 3n^2 + n + 1$ for $n \geq 5$.

Keywords : *Caterpillars, Complete Bipartite, EMT, SEMT, (a, d) -SEAMT, (a, d) -SEAMT.*

ABSTRAK

Pelabelan total (a, d) sisi anti ajaib, notasi (a, d) -TSA, pada graf $G(V, E)$ dengan p titik dan q sisi adalah pemetaan bijektif $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$, yang mempunyai himpunan bobot sisi $W = \{b(e) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) \mid \forall e = xy \in E(G)\} = \{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\}$ dengan bobot sisi awal $a > 0$ dan beda $d \geq 0$. Pelabelan total (a, d) sisi anti ajaib super dari λ , notasi (a, d) -TSAAS yaitu jika mempunyai sifat bahwa setiap titik memperoleh label terkecil $\lambda(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$. Pelabelan (a, d) -TSA (TSAAS) dari λ disebut pelabelan TSA (TSAAS) jika $d = 0$ dan $k = a$. Selanjutnya k disebut konstanta ajaib. Sebuah graf G dikatakan TSA, TSAAS, (a, d) -TSA dan (a, d) -TSAAS jika terdapat pelabelan TSA, TSAAS, (a, d) -TSA dan (a, d) -TSAAS pada graf tersebut, berturut-turut. Pada penelitian ini telah berhasil ditunjukkan bahwa gabungan graf ulat bulu dan bipartite lengkap adalah TSAAS dan TSAAS khususnya graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$

Corresponding author : sudarsanaiwayan@yahoo.co.id

mempunyai $(11n - 2, 0)$ -TSAAS dan $(5n + 3, 2)$ -TSAAS untuk $n \geq 6$; graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ mempunyai $(6n + 7, 0)$ -TSAAS dan $(2n + 9, 2)$ -TSAAS untuk $n \geq 3$; serta graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ mempunyai $(3n^2 + n + 1, 0)$ -TSAAS dan $(n^2 + 2n + 3, 2)$ -TSAAS dengan $f_1 = f_2 = 0$; $f_{2t} = f_{2n} = 0$; $f_3 = f_{2n-2} = 1$; $f_{2n-1} = n - 4$; $f_{2n-3} = n - 2$; $f_{2l+3} = n - 1$ dimana $t = 2, 3, \dots, n - 2$ dan $l = 1, 2, \dots, n - 4$ untuk $n \geq 5$. Dengan demikian, Graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$ adalah TSAS dengan $k = 11n - 2$ untuk $n \geq 6$; graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ juga TSAS dengan $k = 6n + 7$ untuk $n \geq 3$; serta $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ adalah TSAS dengan $k = 3n^2 + n + 1$ untuk $n \geq 5$.

Kata Kunci : *Ulat Bulu, Bipartite lengkap, TSA, TSAS, (a, d)-TSAA, (a, d)-TSAAS*

I. PENDAHULUAN

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang terkait terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama. Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak

beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik ajaib, pelabelan total (a, d) -titik anti ajaib super, pelabelan total sisi ajaib, dan pelabelan total (a, d) -sisi-ajaib super. Berdasarkan Gallian 2012 [1] gabungan graf ulat bulu dan bipartite lengkap masih menjadi masalah terbuka. Oleh karena itu permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana menentukan pelabelan total sisi ajaib super pada gabungan graf ulat bulu dan bipartite lengkap

Permasalahan ini dibatasi pada pelabelan total sisi ajaib super khususnya pada graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$ untuk $n \geq 6$, $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ untuk $n \geq 3$ dan $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ dengan $f_1 = f_2 = 0$; $f_{2t} = f_{2n} = 0$; $f_3 = f_{2n-2} = 1$; $f_{2n-1} = n - 4$; $f_{2n-3} = n - 2$; $f_{2l+3} = n - 1$ dimana $t = 2, 3, \dots, n - 2$ dan $l = 1, 2, \dots, n - 4$ untuk $n \geq 5$.

II. HASIL TERDAHULU

Sebelum disajikan hasil penelitian ini, terlebih dahulu diberikan teorema-teorema penting yang telah ditemukan sebelumnya yang akan digunakan untuk membuktikan hasil baru

dalam penelitian ini. Teorema-teorema tersebut adalah:

Teorema 2.1.

Misalkan graf G adalah TSA dengan p titik dan q sisi. Jika λ adalah pelabelan TSA dari G dengan konstanta ajaib k dan pelabelan λ' didefinisikan sebagai berikut:

$$\lambda'(v_i) = M - \lambda(v_i), \forall v_i \in V(G), \text{ dan}$$

$$\lambda'(x) = M - \lambda(x), \forall x \in E(G)$$

dimana $M = p + q + 1$.

maka λ' adalah pelabelan TSA dengan konstanta ajaib $k' = 3M - k$.

Pelabelan λ' pada teorema di atas dikatakan pelabelan dual dari λ pada G , jika $k' = k$ maka λ' disebut *selfdual* dari λ (Wallis et al. [4]).

Teorema 2.2.

Misalkan graf G adalah TSAS dengan p titik dan q sisi. Jika λ adalah pelabelan TSAS dari G dengan konstanta ajaib k dan pelabelan λ' didefinisikan sebagai berikut:

$$\lambda'(v_i) = p + 1 - \lambda(v_i), \forall v_i \in V(G), \text{ dan}$$

$$\lambda'(uv) = 2p + q + 1 - \lambda(uv), \forall uv \in E(G)$$

maka λ' adalah pelabelan TSAS dengan konstanta ajaib $k' = 4p + q + 3 - k$.

Pelabelan λ' pada Teorema 2.2. diatas dikatakan pelabelan dual super dari λ pada G jika $k' = k$ maka λ' disebut *selfdual* dari λ (Sudarsana et al. [3]).

Teorema 2.3.

Misalkan G adalah graf yang memuat p titik dan q sisi adalah (a, d) -TSAAS. Jika λ adalah pelabelan (a, d) -TSAAS dari G maka pelabelan λ' di definisikan sebagai berikut :

$$\lambda'(v_i) = p + 1 - \lambda(v_i), \forall v_i \in V(G), \text{ dan}$$

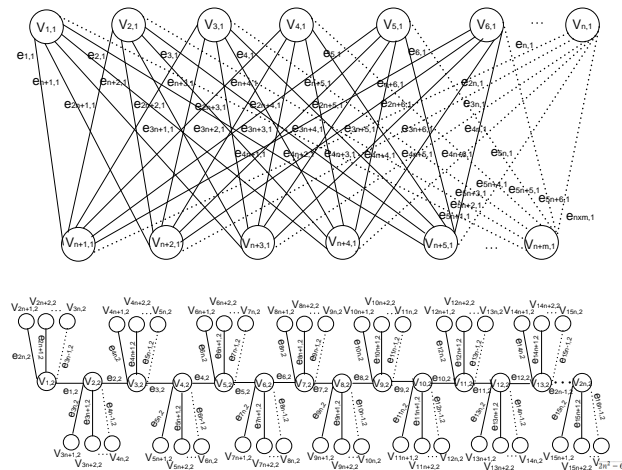
$$\lambda'(uv) = 2p + q + 1 - \lambda(uv), \forall uv \in E(G)$$

maka λ' mempunyai pelabelan (a', d) -TSAAS dari graf G dengan $a' = 4p + q + 3 - a - (q - 1)d$.

Pelabelan λ' pada teorema di atas dikatakan pelabelan dual super dari λ , jika $a' = a$ maka λ' disebut *selfdual* dari λ (Sudarsana et al. [2]).

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil dan pembahasan berikut ini akan membahas mengenai pelabelan TSAS dan TSAAS untuk graf ulat bulu dan bipartite lengkap. Berikut adalah gambar dan notasi secara umum untuk graf $K_{n,m} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$:



Gambar 1 : Penotasian titik dan sisi graf $K_{n,m} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$

Berdasarkan Gambar 1 di atas, dapat dinotasikan himpunan titik dan sisi graf $K_{n,m} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ sebagai berikut.

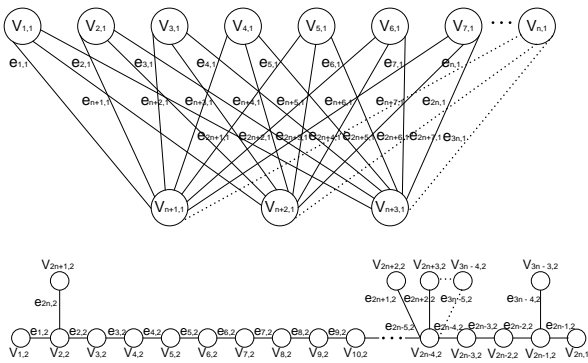
$$V(K_{n,m} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})) = \left\{ \begin{array}{l} v_{i,j} \mid j = 1, 1 \leq i \leq n + m \\ v_{i,j} \mid j = 2, 1 \leq i \leq 2n^2 - 6n \end{array} \right\}$$

$$E(K_{n,m} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})) = \left\{ \begin{array}{l} e_{i,j} \mid j = 1, 1 \leq i \leq n^2 \\ e_{i,j} \mid j = 2, 1 \leq i \leq 2n^2 - 6n - 1 \end{array} \right\}$$

Pada Gambar 1 di atas graf $K_{n,m} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ belum menunjukkan sifat TSAS maupun TSAAS, adapun graf yang menunjukkan sifat TSAS maupun TSAAS untuk graf ulat bulu dan bipartite lengkap dibagi kedalam sub-sub bahasan berikut :

3.1. Graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0)$

Pada bagian ini, akan dibahas pelabelan TSAS pada graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0)$ untuk $n \geq 6$. Notasi titik dan sisi pada graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0)$ untuk $n \geq 6$ disajikan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2: Penotasian titik dan sisi graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0)$

Berdasarkan Gambar 2 di atas, dapat dinotasikan himpunan titik dan sisi graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V \left(K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0) \right) &= \left\{ v_{i,j} \mid j = 1, 1 \leq i \leq n+3 \right\} \\
 &= \left\{ v_{i,j} \mid j = 2, 1 \leq i \leq 3n-3 \right\} \\
 E \left(K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0) \right) &= \left\{ e_{i,j} \mid j = 1, 1 \leq i \leq 3n \right\} \\
 &= \left\{ e_{i,j} \mid j = 2, 1 \leq i \leq 3n-4 \right\} \\
 e_{i,1} &= \begin{cases} v_{i,1}v_{n+1,1}, & 1 \leq i \leq n \\ v_{i-n,1}v_{n+2,1}, & n+1 \leq i \leq 2n \\ v_{i-2n,1}v_{n+3,1}, & 2n+1 \leq i \leq 3n \end{cases} \\
 e_{i,2} &= \begin{cases} v_{i,2}v_{i+1,2}, & 1 \leq i \leq 2n-1 \\ v_{2,2}v_{i+1,2}, & i = 2n \\ v_{2n-4,2}v_{i+1,2}, & 2n+1 \leq i \leq 3n-5 \\ v_{2n-1,2}v_{i+1,2}, & i = 3n-4 \end{cases} \dots(1)
 \end{aligned}$$

Pelabelan TSAS untuk graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0)$ dengan $n \geq 6$ disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.1.

Graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0)$ adalah TSAS dengan $k = 11n - 2$, untuk $n \geq 6$.

Bukti :

Pandang notasi titik dan sisi graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0,1,0, \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0)$ dalam Persamaan

(1) dan Gambar 2 Berikan label pada titik dan sisinya dengan cara berikut.

$$\begin{aligned}
 \lambda(v_{i,1}) &= \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq n+1 \\ 2n+1, & i = n+2 \\ 3n+1, & i = n+3 \end{cases} \\
 \lambda(v_{i,2}) &= \begin{cases} 3n, & i = 1 \\ \frac{6n+i}{2} + 1, & 2 \leq i \leq 2n-2; i \text{ genap} \\ \frac{2n+i-1}{2} + 1, & 3 \leq i \leq 2n-1; i \text{ ganjil} \\ 2n+3, & i = 2n \\ 3n-1, & i = 2n+1 \\ i+2, & 2n+2 \leq i \leq 3n-4 \\ 2n+2, & i = 3n-3 \end{cases} \\
 \lambda(e_{i,1}) &= 10n - i - 3, \quad 1 \leq i \leq 3n \\
 \lambda(e_{i,2}) &= \begin{cases} 5n-4, & i = 1 \\ 7n-i-4, & 2 \leq i \leq 2n-2 \\ 7n-5, & i = 2n-1 \\ 5n-3, & i = 2n \\ 7n-i-4, & 2n+1 \leq i \leq 3n-5 \\ 7n-4, & i = 3n-4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dengan label tersebut diperoleh konstanta ajaib sebagai berikut :

1. Untuk graf pertama

$$k = \begin{cases} \lambda(v_{i,1}) + \lambda(e_{i,1}) + \lambda(v_{n+1,1}), 1 \leq i \leq n \\ \lambda(v_{i-n,1}) + \lambda(e_{i,1}) + \lambda(v_{n+2,1}), n+1 \leq i \leq 2n \\ \lambda(v_{i-2n,1}) + \lambda(e_{i,1}) + \lambda(v_{n+3,1}), 2n+1 \leq i \leq 3n \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} i + 10n - i - 3 + n + 1 = 11n - 2 \\ i - n + 10n - i - 3 + 2n + 1 = 11n - 2 \\ i - 2n + 10n - i - 3 + 3n + 1 = 11n - 2 \end{cases}$$

2. Untuk graf kedua

$$k = \begin{cases} \lambda(v_{i,2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), 1 \leq i \leq 2n-1 \\ \lambda(v_{2,2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), i = 2n \\ \lambda(v_{2n-4,2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), 2n+1 \leq i \leq 3n-5 \\ \lambda(v_{2n-1}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), i = 3n-4 \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} 3n + 5n - 4 + 3n + 2 & = 11n - 2 \\ \frac{6n+i}{2} + 1 + 7n - i - 4 + \frac{2n+i}{2} + 1 & = 11n - 2 \\ \frac{2n+i-1}{2} + 1 + 7n - i - 4 + \frac{6n+i+1}{2} + 1 & = 11n - 2 \\ 2n + 7n - 5 + 2n + 3 & = 11n - 2 \\ 3n + 2 + 5n - 3 + 3n - 1 & = 11n - 2 \\ 4n - 1 + 7n - i - 4 + i + 3 & = 11n - 2 \\ 2n + 7n - 4 + 2n + 2 & = 11n - 2 \end{cases}$$

Dengan demikian, graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0,1,0 \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$ adalah

TSAS dengan $k = 11n - 2$ untuk $n \geq 6$.

Menggunakan Teorema 2.1., Teorema 2.2 dan Teorema 2.3., diperoleh akibat-akibat berikut :

Akibat 3.1.1.

Graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0,1,0 \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$ adalah TSA dengan $k = 19n - 7$, untuk $n \geq 6$.

Akibat 3.1.2.

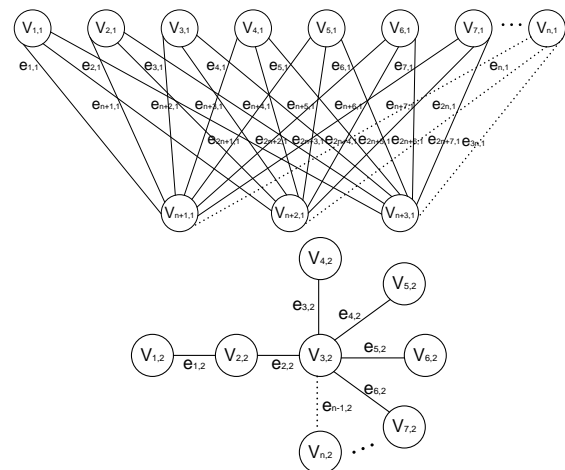
Graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0,1,0 \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$ adalah TSAS dengan $k = 11n + 1$, untuk $n \geq 6$.

Akibat 3.1.3

Untuk $n \geq 6$, Graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(\underbrace{0,1,0 \dots, 0, n-5, 0, 0, 1, 0}_{2n})$ mempunyai pelabelan $(5n + 12, 2) - TSAAS$

3.2. Graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$

Pada bagian ini, akan dibahas pelabelan TSAS pada graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ untuk $n \geq 3$. Notasi titik dan sisi pada graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ untuk $n \geq 3$ disajikan pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3 : Penotasian titik dan sisi graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$

Berdasarkan Gambar 3 di atas, dapat dinotasikan himpunan titik dan sisi graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ sebagai berikut.

$$V(K_{3,n} \cup S_{2,n-2}) = \left\{ \begin{array}{l} v_{i,j} | j = 1, 1 \leq i \leq n+3 \\ v_{i,j} | j = 2, 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}$$

$$E(K_{3,n} \cup S_{2,n-2}) = \left\{ \begin{array}{l} e_{i,j} | j = 1, 1 \leq i \leq 3n \\ e_{i,j} | j = 2, 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}$$

$$e_{i,1} = \begin{cases} v_{i,1}v_{n+1,1}, 1 \leq i \leq n \\ v_{i-n,1}v_{n+2,1}, n+1 \leq i \leq 2n \\ v_{i-2n,1}v_{n+3,1}, 2n+1 \leq i \leq 3n \end{cases}$$

$$e_{i,2} = \begin{cases} v_{i,2}v_{i+1,2}, 1 \leq i \leq 2 \\ v_{3,2}v_{i+1,2}, 3 \leq i \leq n-1 \end{cases} \dots(2)$$

Pelabelan TSAS untuk graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ dengan $n \geq 3$ disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2.

Graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ adalah TSAS dengan $k = 6n + 7$, untuk $n \geq 3$. Graf ini mempunyai pelabelan selfdual

Bukti :

Pandang notasi titik dan sisi graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ dalam Persamaan (2) dan Gambar 3 Berikan label pada titik dan sisinya dengan cara :

$$\lambda(v_{i,1}) = \begin{cases} i + 2, 1 \leq i \leq n \\ 2, i = n + 1 \\ n + 3, i = n + 2 \\ 2n + 3, i = n + 3 \end{cases}$$

$$\lambda(v_{i,2}) = \begin{cases} 1, i = 1 \\ n + 4, i = 2 \\ 2n + 2, i = 3 \\ n + 1 + i, 4 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\lambda(e_{i,1}) = \begin{cases} 6n + 3 - i, 1 \leq i \leq n \\ 6n + 2 - i, n + 1 \leq i \leq 3n \end{cases}$$

$$\lambda(e_{i,2}) = \begin{cases} 5n + 2, i = 1 \\ 3n + 1, i = 2 \\ 3n + 3 - i, 3 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

Dengan label tersebut diperoleh konstanta ajaib sebagai berikut :

1. Untuk graf pertama

$$k = \begin{cases} \lambda(v_{i,1}) + \lambda(e_{i,1}) + \lambda(v_{n+1,1}), 1 \leq i \leq n \\ \lambda(v_{i-n,1}) + \lambda(e_{i,1}) + \lambda(v_{n+2,1}), n + 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq t \leq n \\ \lambda(v_{i-2n,1}) + \lambda(e_{i,1}) + \lambda(v_{n+3,1}), 2n + 1 \leq i \leq 3n, 1 \leq t \leq n \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} i + 2 + 6n + 3 - i + 2 & = 6n + 7 \\ i - n + 2 + 6n + 2 - i + n + 3 & = 6n + 7 \\ i - 2n + 2 + 6n + 2 - i + 2n + 3 & = 6n + 7 \end{cases}$$

2. Untuk graf kedua

$$k = \begin{cases} \lambda(v_{i,2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{1+i,2}), 1 \leq i \leq 2 \\ \lambda(v_{3,2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), 3 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} 1 + 5n + 2 + n + 4 & = 6n + 7 \\ n + 4 + 3n + 1 + 2n + 2 & = 6n + 7 \\ 2n + 2 + 3n + 3 - i + n + 2 + i & = 6n + 7 \end{cases}$$

Dengan demikian, graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ adalah TSAS dengan $k = 6n + 7$ untuk $n \geq 3$.

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 2.2, dan mengambil label titik dan sisi yang baru berupa :

$$\lambda'(v_{i,1}) = 2n + 3 + 1 - \lambda(v_{i,1})$$

$$\lambda'(v_{i,2}) = 2n + 3 + 1 - \lambda(v_{i,2})$$

$$\lambda'(e_{i,1}) = 2(2n + 3) + 4n - 1 + 1 - \lambda(e_{i,1})$$

$$\lambda'(e_{i,2}) = 2(2n + 3) + 4n - 1 + 1 - \lambda(e_{i,2})$$

Dengan pelabelan tersebut diperoleh :

$$k' = 4(2n + 3) + 4n - 1 + 3 - (6n + 7)$$

$$= 8n + 12 + 4n - 1 + 3 - (6n + 7)$$

$$= 8n + 12 + 4n - 1 + 3 - 6n - 7$$

$$= 6n + 7.$$

Dengan demikian, graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ mempunyai pelabelan self dual dengan $k = 6n + 7$, untuk $n \geq 3$.

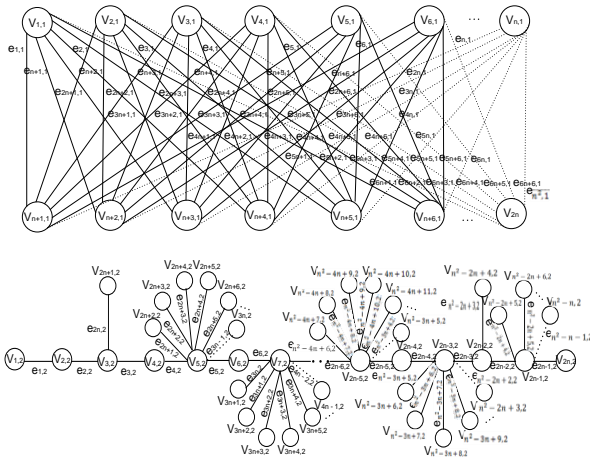
Menggunakan Teorema 2.1 dan Teorema 2.3. diperoleh akibat-akibat berikut :

Akibat 3.2.1. Graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ adalah TSA dengan $k = 12n + 2$, untuk $n \geq 3$.

Akibat 3.2.3. Untuk $n \geq 3$, Graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ mempunyai pelabelan $(2n + 19, 2)$ - TSAAS .

3.3. Graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$

Pada bagian ini, akan dibahas pelabelan TSAS pada graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ untuk $n \geq 5$. Notasi titik dan sisi pada graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ untuk $n \geq 5$ disajikan pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4 : Penotasian titik dan sisi graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$

Berdasarkan Gambar 4 di atas, dapat dinotasikan graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ dengan himpunan titik dan sisinya sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 V(K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})) &= \left\{ \begin{array}{l} v_{i,j} \mid j = 1, 1 \leq i \leq 2n \\ v_{i,j} \mid j = 2, 1 \leq i \leq n^2 - n \end{array} \right\} \\
 E(K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})) &= \left\{ \begin{array}{l} e_{i,j} \mid j = 1, 1 \leq i \leq n^2 \\ e_{i,j} \mid j = 2, 1 \leq i \leq n^2 - n - 1 \end{array} \right\} \\
 e_{i,1} &= \left\{ \begin{array}{l} v_{i,1}v_{n+1,1}, 1 \leq i \leq n \\ v_{i-(t-1)n,1}v_{n+t,1}, 2 \leq t \leq n, n+1 \leq i \leq n^2 \end{array} \right\} \\
 e_{i,2} &= \left\{ \begin{array}{l} v_{i,2}v_{i+1,2}, 1 \leq i \leq 2n-1 \\ v_{3,2}v_{i+1,2}, i = 2n \\ v_{2l+3,2}v_{i+1,2}, 1 \leq l \leq n-4, 2n+1 \leq i \leq n^2-3n+4 \\ v_{2n-3,2}v_{i+1,2}, n^2-3n+5 \leq i \leq n^2-2n+2 \\ v_{2n-2,2}v_{i+1,2}, i = n^2-2n+3, 2 \\ v_{2n-1,2}v_{i+1,2}, n^2-2n+4 \leq i \leq n^2-n-1 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

Pelabelan TSAS untuk graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ untuk $n \geq 5$ disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3.

Jika f_i dengan $i = 1, 2, \dots, 2n$ adalah bilangan asli dengan $f_1 = f_2 = 0$; $f_{2t} = f_{2n} = 0$; $f_3 = f_{2n-2} = 1$; $f_{2n-1} = n-4$; $f_{2n-3} = n-2$; $f_{2l+3} = n-1$ dimana $t = 2, 3, \dots, n-2$ dan $l = 1, 2, \dots, n-4$ untuk $n \geq 5$, maka graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ adalah TSAS dengan $k = 3n^2 + n + 1$.

Bukti :

Pandang notasi titik dan sisi graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ dalam Persamaan (3) dan Gambar 4 Berikan label pada titik dan sisinya dengan cara :

$$\lambda(v_{i,1}) = \begin{cases} i, 1 \leq i \leq n+1 \\ (i-n)n+1, n+2 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

$$\lambda(v_{i,2}) = \begin{cases} \frac{2n^2+i+3}{2}, 1 \leq i \leq 2n-3; i \text{ ganjil} \\ \frac{2n+i}{2} + 1, 1 \leq i \leq 2n-2; i \text{ genap} \\ n^2-n+2, i = 2n-1 \\ n^2-n+4, i = 2n \\ n^2-2n+2, i = 2n+1 \\ n^2-(2l+3)n+i+l-1, 1 \leq l \leq n-4, 12n+2 \leq i \leq n^2-3n+5 \\ n+i-3, n^2-3n+6 \leq i \leq n^2-2n+3 \\ n^2-n+3, i = n^2-2n+4 \\ n+i, n^2-2n+5 \leq i \leq n^2-n \end{cases}$$

$$\lambda(e_{i,1}) = 3n^2 - i, 1 \leq i \leq n^2$$

$$\lambda(e_{i,2}) = \begin{cases} 2n^2-2-i, 1 \leq i \leq 2n-3 \\ 2n^2-1, i = 2n-2 \\ n^2+3n-5, i = 2n-1 \\ n^2+3n-4, i = 2n \\ n^2+(2l+4)n-i-2l-2, 1 \leq l \leq n-4, 2n+1 \leq i \leq n^2-3n+4 \\ 2n^2-n-i+3, n^2-3n+5 \leq i \leq n^2-2n+2 \\ 2n^2-2, i = n^2-2n+3 \\ 2n^2+n-i-2, n^2-2n+4 \leq i \leq n^2-n-1 \end{cases}$$

Dengan label tersebut diperoleh konstanta ajaib sebagai berikut :

1. Untuk graf pertama

$$k = \begin{cases} \lambda(v_{i,1}) + \lambda(e_{i,1}) + \lambda(v_{n+1,1}), 1 \leq i \leq n \\ \lambda(v_{i-(t-1)n,1}) + \lambda(e_{i,1}) + \lambda(v_{n+t,1}), 2 \leq t \leq n, n+1 \leq i \leq n^2 \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} i + 3n^2 - i + n + 1 & = 3n^2 + n + 1 \\ i - (t-1)n + 3n^2 - i + tn + 1 & = 3n^2 + n + 1 \end{cases}$$

2. Untuk graf kedua

$$k = \begin{cases} \lambda(v_{i,2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), 1 \leq i \leq 2n - 1 \\ \lambda(v_{3,2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), i = 2n \\ \lambda(v_{2l+3,2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), 1 \leq l \leq n-4, 2n+1 \leq i \leq n^2 - 3n + 4 \\ \lambda(v_{2n-3}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), n^2 - 3n + 5 \leq i \leq n^2 - 2n + 2 \\ \lambda(v_{2n-2}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), i = n^2 - 2n + 3, 2 \\ \lambda(v_{2n-1}) + \lambda(e_{i,2}) + \lambda(v_{i+1,2}), n^2 - 2n + 4 \leq i \leq n^2 - n - 1 \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} \frac{2n^2+i+3}{2} + 2n^2 - 2 - i + \frac{2n+i+1}{2} + 1 & = 3n^2 + n + 1 \\ \frac{2n+i}{2} + 1 + 2n^2 - 2 - i + \frac{2n^2+i+2}{2} + 1 & = 3n^2 + n + 1 \\ 2n + 2n^2 - 1 + n^2 - n + 2 & = 3n^2 + n + 1 \\ n^2 - n + 2 + n^2 + 3n - 5 + n^2 - n + 4 & = 3n^2 + n + 1 \\ n^2 + 3 + n^2 + 3n - 4 + n^2 - 2n + 2 & = 3n^2 + n + 1 \\ n^2 + l + 3 + n^2 + (2l+4)n - i - 2l - 2 + n^2 - (2l+3)n + i + l & = 3n^2 + n + 1 \\ n^2 + n + 2n^2 - n - i + 3 + n + i - 2 & = 3n^2 + n + 1 \\ 2n + 2n^2 - 2 + n^2 - n + 3 & = 3n^2 + n + 1 \\ n^2 - n + 2 + 2n^2 + n - i - 2 + n + i + 1 & = 3n^2 + n + 1 \end{cases}$$

Menggunakan Teorema 2.1. Teorema 2.2. dan Teorema 2.3. diperoleh akibat-akibat berikut :

Akibat 3.3.1.

Jika f_i dengan $i = 1, 2, \dots, 2n$ adalah bilangan asli dengan $f_1 = f_2 = 0$; $f_{2t} = f_{2n} = 0$; $f_3 = f_{2n-2} = 1$; $f_{2n-1} = n - 4$; $f_{2n-3} = n - 2$; $f_{2l+3} = n - 1$ dimana $t = 2, 3, \dots, n - 2$ dan $l = 1, 2, \dots, n - 4$ $n \geq 5$, maka graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ adalah TSA dengan $k = 6n^2 - n - 1$.

Akibat 3.3.2.

Jika f_i dengan $i = 1, 2, \dots, 2n$ adalah bilangan asli dengan $f_1 = f_2 = 0$; $f_{2t} = f_{2n} = 0$; $f_3 = f_{2n-2} = 1$; $f_{2n-1} = n - 4$; $f_{2n-3} = n - 2$; $f_{2l+3} = n - 1$ dimana $t = 2, 3, \dots, n - 2$ dan $l = 1, 2, \dots, n - 4$ $n \geq 5$, maka graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ adalah TSAS dengan $k = 3n^2 + 2n + 1$.

Akibat 3.3.3.

Jika f_i dengan $i = 1, 2, \dots, 2n$ adalah bilangan asli dengan $f_1 = f_2 = 0$; $f_{2t} = f_{2n} = 0$; $f_3 =$

$f_{2n-2} = 1$; $f_{2n-1} = n - 4$; $f_{2n-3} = n - 2$; $f_{2l+3} = n - 1$ dimana $t = 2, 3, \dots, n - 2$ dan $l = 1, 2, \dots, n - 4$ $n \geq 5$, maka graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ mempunyai pelabelan $(n^2 + 3n + 1, 2)$ - TSAAS.

Hasil lain yang dapat diperoleh pada penelitian ini adalah graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0, 1, 0 \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0)$ untuk $n \geq 6$, $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ untuk $n \geq 3$ dan $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ untuk $n \geq 5$ masing-masing mempunyai pelabelan (a, d) -TSAAS untuk $d = 2$ dan $a = 5n + 3, 2n + 9$ dan $n^2 + 2n + 3$ yang tersaji dalam teorema-teorema berikut :

Teorema 4.1.

Graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0, 1, 0 \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0)$ mempunyai pelabelan $(5n + 3, 2) - TSAAS$ untuk $n \geq 6$.

Bukti :

Berdasarkan notasi titik dan sisi graf $K_{3,n} \cup P_{2n}(0, 1, 0 \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0)$ dalam Persamaan 1 dan Gambar 2 di dapatkan label titik yang sama untuk Teorema 3.1 sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut :

$$\lambda(e_{i,1}) = 4n + i, \quad 1 \leq i \leq 3n$$

$$\lambda(e_{i,2}) = \begin{cases} 9n + 1, & i = 1 \\ 7n + i + 1, & 2 \leq i \leq 2n - 2 \\ 7n + 2, & i = 2n - 1 \\ 9n, & i = 2n \\ 9n - 2n + i + 1, & 2n + 1 \leq i \leq 3n - 5 \\ 7n + 1, & i = 3n - 4 \end{cases}$$

Dengan label tersebut diperoleh himpunan bobot sisi W sebagai berikut :

$$W_1 = \{5n + 2i + 1 | 1 \leq i \leq 3n\}$$

$$= \{5n + 3, 5n + 5, \dots, 11n + 1\}.$$

$$W_2 = \{11n + 3 | i = 3n - 4\} \cup \{11n + 5 | i = 2n -$$

$$1 \cup 11n + 2i + 3 | 2 \leq i \leq 2n - 2\} \cup \{15n + 1 | i = 2n \cup 15n +$$

$$3 | i = 1 \cup 11n + 2i + 3 | 2n + 1 \leq i \leq 3n - 5$$

$$= \{11n + 3, 11n + 5, 11n + 7, 11n +$$

$$9, \dots, 15n - 1, 15n + 1, 15n + 3, 15n + 5, 15n + 7,$$

$$\dots, 17n - 7\}.$$

$$W = W_1 \cup W_2 = \{5n + 3, 5n + 5, 5n + 7, \dots, 17n -$$

$$7\}.$$

Dengan demikian, graf

$K_{3,n} \cup P_{2n}(0, 1, 0, \dots, 0, n - 5, 0, 0, 1, 0)$ mempunyai

pelabelan (a, d) -TSAAS dengan $a = 5n + 3$ dan $d = 2$ untuk $n \geq 6$.

Teorema 4.2.

Graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ mempunyai pelabelan $(2n + 9, 2)$ -TSAAS Untuk $n \geq 3$.

Bukti :

Berdasarkan notasi titik dan sisi graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ dalam Persamaan 2 dan Gambar 3 di dapatkan label titik yang sama untuk Teorema 3.2 sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut :

$$\lambda(e_{i,1}) = \begin{cases} 2n + 3 + i, & 1 \leq i \leq n \\ 2n + 4 + i, & n + 1 \leq i \leq 3n \end{cases}$$

$$\lambda(e_{i,2}) = \begin{cases} 3n + 4, & i = 1 \\ 5n + 5, & i = 2 \\ 5n + 3 + i, & 3 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

Dengan label tersebut diperoleh himpunan

bobot sisi W sebagai berikut :

$$W_1 = \{2n + 2i + 7 | 1 \leq i \leq n\} \cup \{2n + 2i + 9 | n +$$

$$1 \leq i \leq 3n\}$$

$$= \{2n + 9, 2n + 11, \dots, 4n + 7, 4n + 11, 4n +$$

$$13, \dots, 8n + 9\}.$$

$$W_2 = \{4n + 9 | i = 1\} \cup \{8n + 11 | i = 2\} \cup$$

$$\{8n + 2i + 7 | 3 \leq i \leq n - 1\}$$

$$= \{4n + 9, 8n + 11, 8n + 13, 8n + 15, \dots, 10n +$$

$$5\}.$$

$$W = W_1 \cup W_2 = \{2n + 9, 2n + 11, 2n +$$

$$13, \dots, 10n + 5\}.$$

Dengan demikian, graf $K_{3,n} \cup S_{2,n-2}$ mempunyai pelabelan total (a, d) -TSAAS dengan $a = 2n + 9$ dan $d = 2$.

Teorema 4.3.

Jika f_i dengan $i = 1, 2, \dots, 2n$ adalah bilangan asli dengan $f_1 = f_2 = 0$; $f_{2t} = f_{2n} = 0$; $f_3 = f_{2n-2} = 1$; $f_{2n-1} = n - 4$; $f_{2n-3} = n - 2$; $f_{2t+3} = n - 1$ dimana $t = 2, 3, \dots, n - 2$ dan $= 1, 2, \dots, n - 4$ $n \geq 5$, maka graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ mempunyai pelabelan $(n^2 + 2n + 3, 2)$ -TSAAS.

Bukti :

Berdasarkan notasi titik dan sisi graf $K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ dalam Persamaan 3 dan Gambar 4 di dapatkan label titik yang sama untuk Teorema 3.3 sehingga diperoleh label sisi sebagai berikut :

$$\lambda(e_{i,1}) = n^2 + n + i, 1 \leq i \leq n^2$$

$$\lambda(e_{i,2}) = \begin{cases} 2n^2 + n + 2 + i, 1 \leq i \leq 2n - 3 \\ 2n^2 + n + 1, i = 2n - 2 \\ 3n^2 - 2n + 5, i = 2n - 1 \\ 3n^2 - 2n + 4, i = 2n \\ 3n^2 - (2l + 3)n + 2l + 2 + i, 1 \leq l \leq n - 4, 2n + 1 \leq i \leq n^2 - 3n + 4 \\ 2n^2 + 2n - 3 + i, j = 2, n^2 - 3n + 5 \leq i \leq n^2 - 2n + 2 \\ 2n^2 + n + 2, j = 2, i = n^2 - 2n + 3 \\ 2n^2 + 2 + i, j = 2, n^2 - 2n + 4 \leq i \leq n^2 - n - 1 \end{cases}$$

Dengan label tersebut diperoleh himpunan

bobot sisi W sebagai berikut :

$$\begin{aligned} W_1 &= \{n^2 + 2n + 2i + 1 | 1 \leq i \leq n^2\} \\ &= \{n^2 + 2n + 3, n^2 + 2n + 5, \dots, 3n^2 + 2n + 1\}. \\ W_2 &= \{3n^2 + 2n + 3 | i = 2n - 3\} \cup \{3n^2 + 2n + \\ &\quad 5i = n^2 - 2n + 3\} \cup \\ &\quad \{3n^2 + 2n + 2i + 5 | 1 \leq i \leq 2n - 3\} \cup \\ &\quad \{5n^2 + 4l - 4ln - 6n + 2i + 5 | 1 \leq l \leq n - \\ &\quad 4, 2n + 1 \leq i \leq n^2 - 3n + 4\} \cup \{5n^2 - 4n + \\ &\quad 9i = 2n\} \cup \{5n^2 - 4n + 11i = 2n - 1\} \cup \{3n^2 + 2i + 5 \\ &\quad n^2 - 2n + 4 \leq i \leq n^2 - n - 1\} \cup \{3n^2 + 4n + 2i - 5n^2 \\ &\quad - 3n + 5 \leq i \leq n^2 - 2n + 2\} \\ &= \{3n^2 + 2n + 3, 3n^2 + 2n + 5, 3n^2 + 2n + \\ &\quad 7, \dots, 3n^2 + 6n - 1, 3n^2 + 6n + 1, \dots, 5n^2 - 4n + 7, \\ &\quad 5n^2 - 4n + 9, 5n^2 - 4n + 11, 5n^2 - 4n + 13, \dots, \\ &\quad 5n^2 - 2n + 3, 5n^2 - 2n + 5, \dots, 5n^2 - 1\}. \end{aligned}$$

$$W = W_1 \cup W_2 = \{n^2 + 2n + 3, n^2 + 2n + 5, n^2 + 2n + 7, \dots, 5n^2 - 1\}.$$

Dengan demikian, graf

$K_{n,n} \cup P_{2n}(f_1, f_2, \dots, f_{2n})$ mempunyai pelabelan (a, d) - TSAAS dengan $a = n^2 + 2n + 3$ dan $d = 2$.

DAFTAR PUSTAKA

- Gallian, J. A., 2012, *A Dynamic Survey of Graph Labelling*, Electronic Journal of Combinatorics, Vol. 18, (<http://www.emis.ams.org/journals/EJC/Survey/ds6.pdf>), diakses 14 November 2012.
- I W. Sudarsana, E. T. Baskoro, D. Izmailusa and H. Assiyatun, *On super (a, d) -edge antimagic total labeling of disconnected graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput., 55 (2005), 149-158.
- Sudarsana, I W., Baskoro, E. T., Ismailusa, D., and Uttunggadewa, S., 2009, *An Expansion Technique on Super Edge-Magic Total Graphs*, ARS Combinatoria, Vol. 91 : 231-241.
- Wallis, W. D., Baskoro, E. T., Miller, M., and Slamun, 2000, *Edge-Magic Total Labelings*, Australasian J. Combin., Vol. 22 : 177-190.