Online Journal of Natural Science Vol 5(3) :318-329 ISSN-p: 2338-0950
Desember 2016 ISSN-e : 2541-1969

Quiver dari Aljabar Lintasan Terhubung

The Quiver of a Connected Path Algebra

Vika Yugi Kurniawan

Program Studi Matematika FMIPA UNS

ABSTRACT

A directed graph can be viewed as a 4-tuple $Q = (Q_0, Q_1, s, \mathrm{t})$ where Q_0 and Q_1 are finite sets of vertices and arrows respectively, and s, t are two maps from Q_1 to Q_0. A directed graph is often called a quiver. For a quiver Q and a field K, we can define a K-algebra with basis the set of all paths in Q. This K-algebra is called path algebra KQ. In this paper, we study the properties of a path algebra over a field K. These properties are used to show interplay betwen a connected path algebra and its quiver. In the end of discussion, we show that the path algebra KQ is connected if and only if Q is a connected quiver.

Keywords: ***Idempotent, Indecomposable, Path Algebra, Primitive orthogonal.***

ABSTRAK

Graf berarah dapat dipandang sebagai pasangan 4-*tupel* yang terdiri dari dua himpunan serta dua pemetaan dan disebut sebagai *quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. Untuk sebarang quiver Q dan lapangan K, dapat didefinisikan suatu K-aljabar yang disebut dengan aljabar lintasan KQ yang memiliki basis berupa himpunan semua lintasan yang ada pada *quiver* Q. Pada makalah ini, dipelajari sifat-sifat dari suatu aljabar lintasan atas lapangan K. Selanjutnya sifat-sifat tersebut digunakan untuk menunjukkan keterkaitan antara aljabar lintasan terhubung dengan quivernya. Diakhir pembahasan ditunjukan bahwa suatu aljabar lintasan KQ dari suatu *quiver* Q merupakan aljabar terhubung jika dan hanya jika Q merupakan *quiver* terhubung

Kata Kunci : ***Aljabar lintasan, Idempoten, Indekomposabel, Ortogonal primitif.***

PENDAHULUAN

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Banyak persoalan akan lebih jelas untuk difahami apabila direpresentasikan dalam bentuk graf. Konsep graf karya Euler dalam menyelesaikan masalah Jembatan Konigsberg pada tahun 1735 merupakan awal dari lahirnya teori graf. Meskipun

Coresponding Author : vikayugi@staff.uns.ac.id (phone: +62-856-2528-707)

umurnya relatif muda, teori graf telah berkembang sangat pesat akhir-akhir ini, baik dalam bidang pengembangan teori maupun aplikasi di berbagai bidang.

Graf secara umum merupakan obyek kombinatorial yang terdiri dari garis-garis (*edges*) dan titik-titik (*vertex*). Apabila setiap garis dari graf memiliki orientasi arah, maka graf tersebut disebut sebagai graf berarah. Dalam beberapa literatur, graf berarah dapat dipandang sebagai pasangan 4-*tupel* yang terdiri dari dua himpunan serta dua pemetaan dan disebut sebagai quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. Himpunan yang dimaksud adalah himpunan titik Q_0 dan himpunan panah Q_1. Sedangkan pemetaan s dan t adalah pemetaan dari himpunan panah ke himpunan titik, yaitu $s, t : Q_1 \to Q_0$, dengan $s(\alpha) \in Q_0$ disebut sebagai sumber dari panah $\alpha \in Q_1$ dan $t(\alpha) \in Q_0$ disebut sebagai target dari panah $\alpha \in Q_1$. Barisan panah-panah pada quiver Q disebut sebagai lintasan. Dengan mendefinisikan suatu operasi perkalian pada himpunan lintasan, maka himpunan semua lintasan pada quiver membentuk struktur semigrup. Selanjutnya untuk sebarang quiver Q dan lapangan K dapat didefinisikan suatu K-aljabar yang disebut dengan aljabar lintasan KQ yang memiliki basis berupa himpunan semua lintasan yang ada pada quiver tersebut. Teori tentang aljabar lintasan sangat bermanfaat untuk mempelajari hal-hal yang berkaitan dengan lintasan dari suatu graf berarah atau *quiver*. Salah satunya pada makalah Redrigues dan Neubaeur (2011) yang memberikan kesimpulan bahwa secara umum aljabar lintasan dapat digunakan untuk mengkonstrusi suatu pembangun melintang dari graf multi-relasional (*a multi-relational graph tranversal engine*). Karena itu perkembangan kajian tentang aljabar lintasan ini cukup pesat sekali, antara lain yang ditulis oleh Abrams dan Kanuni (2013), Alahmadi dan Alasulami (2014), Ara dan Cortinas (2013), Hazrat (2013), Ruiz dan Tomforde (2013), dan Tomforde (2011).

Pada makalah ini, dipelajari sifat-sifat dari suatu alabar lintasan atas lapangan. Selajutnya sifat-sifat tersebut digunakan untuk menunjukkan keterkaitan antara *quiver* terhadap keterhubungan dari aljabar lintasannya. Penulisan makalah ini bersifat studi kepustakaan, dimana penulis menghimpun hasil-hasil penelitian dari berbagai referensi kemudian menyajikannya kembali secara runtut dan disertai contoh-contoh supaya pembaca lebih mudah dalam memahami konsep aljabar lintasan atas lapangan.

ALJABAR ATAS LAPANGAN

Sebelum membahas tentang aljabar lintasan, terlebih dahulu akan diperkenalkan pengertian aljabar beserta contoh dan sifat-sifatnya. Perlu diketahui bahwa beberapa pengertian dalam makalah ini diambil dari Assem (2005) dan Dummit (2004).

Definisi 2.1 ***Aljabar A*** *atas lapangan K atau K-aljabar adalah sebuah ring A dengan elemen identitas sedemikian sehingga sebagai K-ruang vektor A memenuhi kondisi:*

$$\lambda (ab) = (a \lambda)b = a(\lambda b)$$

untuk setiap $\lambda \in K$ *dan* $a, b \in A$.

Dalam hal ini perkalian vektor dengan skalar dari kanan didefinisikan sama dengan perkalian skalar dari kiri, yaitu $a \lambda = \lambda a$. Jika *A* dan *B* merupakan *K*-aljabar, pemetaan $f: A \to B$ disebut suatu homomorfisma *K*-aljabar jika f merupakan pemetaan linier dan untuk setiap $a, b \in A$ berlaku $f(ab) = f(a)f(b)$. Jika f bijektif maka *A* dan *B* dikatakan isomorfis yang dinotasikan $A \cong B$. Berikut akan diberikan beberapa contoh aljabar.

Contoh 2.2

1. Setiap lapangan *K* merupakan *K*-aljabar, dengan operasi penjumlahan dan perkaliaannya seperti yang terdefinisi dalam lapangannya. Demikian pula dengan operasi perkalian skalarnya.
2. Matriks berukuran $n \times n$ atas lapangan K, yaitu

$$M_{n\times n}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \; a_{ij} \in K, \text{untuk } 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

dengan operasi penjumlahan dan perkalian antar matriks biasa serta perkalian skalar dengan matriks merupakan aljabar atas lapangan K.

Setelah memahami definisi aljabar, berikut akan diberikan definisi dari sub aljabar.

Definisi 2.3 *Diberikan K-aljabar A. Sub ruang B di A disebut* ***sub aljabar*** *dari A jika elemen identitas A merupakan elemen identitas B dan untuk setiap* $a, b \in B$ *berlaku* $ab \in B$.

Perhatikan contoh 2.2 nomor 2. Salah satu sub aljabar dari $M_{n\times n}(K)$ adalah himpunan matriks segitiga atas berukuran $n \times n$. Matriks identitas *I* dengan ukuran $n \times n$ merupakan elemen identitas pada matriks segitiga atas. Hasil kali matriks segitiga atas juga berupa matriks segitiga atas. Dengan demikian operasi perkaliaannya bersifat tertutup. Begitu juga himpunan matriks segitiga bawah berukuran $n \times n$ merupakan sub aljabar dari $M_{n\times n}(K)$.

QUIVER DAN ALJABAR LINTASAN

Pada bagian ini akan diberikan pengertian dasar beserta contoh dari *quiver* dan aljabar lintasan.

Definisi 3.1 ***Quiver*** *adalah pasangan 4-tupel* (Q_0, Q_1, s, t) *yang terdiri atas dua himpunan, yaitu* Q_0 *(yang elemen-elemennya disebut titik) dan* Q_1 *(yang elemen-elemennya disebut panah), serta dua pemetaan* $s, t: Q_1 \longrightarrow Q_0$ *dengan* $s(\alpha) \in Q_0$ *disebut sumber dari panah* $\alpha \in Q_1$ *dan* $t(\alpha) \in Q_0$ *disebut target dari panah* $\alpha \in Q_1$.

Pada definisi di atas, jika $\alpha \in Q_1$ bersumber di $a = s(\alpha)$ dan bertarget di $b = t(\alpha)$ maka biasa ditulis $\alpha : a \longrightarrow b$. Quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ biasa ditulis secara lebih ringkas $Q = (Q_0, Q_1)$ atau Q saja. Quiver Q dikatakan **berhingga** jika Q_0 dan Q_1 merupakan himpunan berhingga. Apabila graf $\bar{Q}$ adalah quiver Q yang arah dari setiap panahnya diabaikan, maka quiver Q terhubung jika $\bar{Q}$ graf terhubung. Selanjutnya, berikut akan diberikan pengertian subquiver.

Definisi 3.2 ***Subquiver*** *dari quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ *merupakan pasangan 4-tupel* $Q' = (Q_0{}', Q_1{}', s', t')$ *sedemikian hingga* $Q_0{}' \subseteq Q_0$, $Q_1{}' \subseteq Q_1$, $s' = {}^{s}|_{Q_1{}'}$, $t' = {}^{t}|_{Q_1{}'}$. *Selain itu juga dipenuhi jika* $\alpha : a \longrightarrow b$ *merupakan panah di* Q_1 *sedemikian hingga* $\alpha \in Q_1{}'$ *dan* $a, b \in Q_0{}'$ *maka* $s'(\alpha) = a$ *dan* $t'(\alpha) = b$.

Setelah diberikan beberapa pengertian dasar dari quiver, berikut akan diberikan pengertian aljabar lintasan yang merupakan aljabar yang dibangun oleh lintasan-lintasan yang ada pada quiver. Tapi sebelumnya perlu diketahui definisi dari lintasan pada suatu quiver yang akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 3.3 *Diberikan quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ *dan* $a, b \in Q_0$. *Barisan* $(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l|b)$ *dengan* $\alpha_k \in Q_1$ *untuk setiap* $1 \leq k \leq l$, *dan berlaku* $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ *untuk setiap* $1 \leq k \leq l$ *dan* $t(\alpha_l) = b$ *disebut* ***lintasan*** *dengan panjang* $l \geq 1$ *yang bersumber di* a *dan bertarget di* b.

Lintasan dapat ditulis juga sebagai barisan panah $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_l$ dan digambarkan sebagai berikut

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b.$$

Himpunan semua lintasan pada Q dengan panjang l dinotasikan dengan Q_l. Dalam hal ini setiap $a \in Q_0$ juga dipandang lintasan yang dengan panjang $l = 0$, disebut sebagai lintasan trivial pada a dan dinotasikan dengan $\varepsilon_a = (a||a)$.

Definisi 3.4 *Lintasan dengan panjang* $l \geq 1$ *yang memiliki sumber dan target pada titik yang sama disebut* ***siklus***. *Siklus dengan panjang 1 disebut* ***loop***. *Quiver* Q *disebut asiklis jika tidak memiliki siklus.*

Pada quiver Q, jika terdapat lintasan dari a ke b maka a disebut sebagai ***pendahulu*** dari b dan b disebut sebagai ***pengikut*** dari a. Selanjutnya, jika terdapat panah dari a ke b maka a disebut sebagai ***pendahulu langsung*** dari b dan b disebut sebagai ***pengikut langsung*** dari a. Untuk setiap $a \in Q_0$, a^- didefinisikan sebagai himpunan semua pendahulu langsung dari a, dan a^+ adalah himpunan semua pengikut langsung dari a. Untuk selanjutnya, $a^+ \cup a^-$ disebut sebagai tetangga dari a.

Pada penelitian ini diasumsikan semua quiver yang diberikan merupakan quiver berhingga. Dengan mendefinisikan suatu operasi perkalian pada himpunan lintasan yang berupa barisan panah-panah, maka himpunan semua lintasan pada quiver membentuk struktur semigrup. Dengan demikian himpunan lintasan dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan sebuah ring. Selanjutnya untuk sebarang lapangan K dan quiver Q dapat didefinisikan suatu K-aljabar yang disebut dengan aljabar lintasan atas lapangan K pada Q.

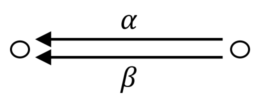
Definisi 3.5 *Diberikan quiver Q. Aljabar atas K yang sebagai basisnya adalah himpunan semua lintasan $(a|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l|b)$ dengan panjang $l \geq 0$ di Q disebut sebagai **aljabar lintasan** KQ.*

Pada aljabar lintasan KQ, hasil kali dua buah lintasan $\alpha_1 \dots \alpha_l$ dan $\beta_1 \dots \beta_k$ didefinsikan dengan

$$(\alpha_1 \dots \alpha_l)(\beta_1 \dots \beta_k) = \begin{cases} (\alpha_1 \dots \alpha_l \beta_1 \dots \beta_k) & ; \text{jika } t(\alpha_l) = s(\beta_1) \\ 0 & ; \text{jika } t(\alpha_l) \neq s(\beta_1) \end{cases}.$$

Untuk lebih memperjelas pengertian aljabar lintasan yang telah diberikan di atas, berikut akan diberikan beberapa contoh sederhana dari aljabar lintasan.

Contoh 3.6 Diberikan quiver Q yang terdiri dari dua buah titik dengan dua buah panah yang menghubungkan keduanya seperti pada gambar berikut



Himpunan $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha\}$ merupakan basis dari aljabar lintasan KQ dengan definisi perkalian yang diberikan pada tabel berikut

$\cdot$	ε_1	ε_2	A	β
ε_1	ε_1	0	0	0
ε_2	0	ε_2	A	β
α	α	0	0	0
β	β	0	0	0

Dapat ditunjukkan bahwa KQ isomorfis dengan aljabar matriks segitiga bawah, yaitu

$$T_2(K) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ (b, c) & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in K \right\}.$$

Isomorfisma tersebut diberikan oleh suatu pemetaan linier sedemikian hingga

$$\varepsilon_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (0,0) & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,0) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (0,1) & 0 \end{bmatrix}, \beta \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1,0) & 0 \end{bmatrix}.$$

SIFAT-SIFAT ALJABAR LINTASAN

Setelah mamahami definisi aljabar lintasan beserta contoh-contohnya, berikut akan diberikan sifat-sifat aljabar lintasan. Beberapa sifat di makalah ini diambil dari Assem (2005) yang akan disajikan dengan lebih terurut dan bukti-bukti yang lebih jelas. Sifat yang pertama menunjukkan hubungan antara keberhinggaan quiver dengan aljabar lintasannya. Ada tidaknya siklus dan keberhinggaan jumlah titik pada suatu quiver memiliki hubungan terhadap keberhinggan dimensi aljabar lintasannya.

Lema 4.1 *Diberikan quiver Q dan KQ merupakan aljabar lintasan dari Q, maka berlaku:*

(a) KQ adalah aljabar asosiatif,
(b) KQ memiliki sebuah elemen identitas jika dan hanya jika Q_0 berhingga,
(c) KQ berdimensi hingga jika dan hanya jika Q berhingga dan asikslis.

***Bukti*:**

(a) Dengan memperhatikan kembali definisi pergandaan dua buah lintasan pada aljabar lintasan, dapat diketahui bahwa hasil kali vektor-vektor basis merupakan komposisi lintasan yang jelas bersifat asosiatif.

(b) Jelas bahwa setiap lintasan stasioner $\varepsilon_a = (a||a)$ merupakan sebuah idempoten dari KQ. Diambil sebarang lintasan $w = (a_0|\dots|a_n)$ di Q, diperoleh

$$\begin{aligned}\left(\textstyle\sum_{a_i\in Q_0}\varepsilon_{a_i}\right)w &= \left(\varepsilon_{a_1}+\varepsilon_{a_2}+\dots+\varepsilon_{a_n}\right)w\\ &= \varepsilon_{a_1}w+\dots+\varepsilon_{a_0}w+\dots+\varepsilon_{a_n}w\\ &= 0+\dots+0+\varepsilon_{a_0}w+0+\dots+0\\ &= \varepsilon_{a_0}w = w.\end{aligned}$$

Jika Q_0 berhingga, maka $\sum_{a\in Q_0}\varepsilon_a$ adalah identitas untuk KQ.

Sebaliknya diandaikan bahwa Q_0 tak berhingga. Misalkan $1 = \sum_{i=1}^{m}\curlywedge_i w_i$ adalah elemen identitas dari KQ, dengan $\curlywedge_i$ adalah skalar tak nol dan w_i lintasan di Q. Himpunan semua sumber dari lintasan-lintasan w_i, katakan Q_0', paling banyak memiliki m elemen dan jelas berhingga. Diambil sebarang $a \in Q_0\backslash Q_0'$, karena $t(\varepsilon_a) \neq s(w_i)$ maka $\varepsilon_a.1 = 0$, terjadi kontradiksi. Jadi, diperoleh bahwa Q_0 berhingga.

(c) Andaikan Q tak berhinga, maka basis dari KQ juga berdimensi tak hingga. Jika $w = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l$ merupakan siklus di Q, maka untuk setiap $t \geq 0$ diperoleh vektor basis $w^t = (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l)^t$ sehingga KQ juga berdimensi tak hingga. Sebaliknya, jika Q berhingga dan asikslis, maka Q hanya memuat lintasan sebanyak berhingga sehingga KQ berdimensi hingga. ■

Sebelum membahas lebih lanjut tentang keterhubungan suatu aljabar lintasan, akan diberikan pengertian dari elemen idempoten yang akan bermanfaat untuk mendefinisikan aljabar terhubung dan membahas sifat-sifatnya.

Definisi 4.2 *Diberikan sebuah K-aljabar A. Elemen e dikatakan* ***idempoten*** *jika $e^2 = e$. Elemen idempoten e dikatakan* ***idempotent pusat*** *jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $ea =$*

ae. *Elemen idempotent* $e_1, e_2 \in A$ *dikatakan* ***saling ortogonal*** *jika* $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$. *Elemen idempoten* e *dikatakan* ***primitif*** *jika* e *tidak dapat ditulis sebagai jumlahan dari dua elemen* ***idempoten ortogonal*** *tak nol di* A.

Untuk lebih memahami definisi di atas, berikut akan diberikan sebuah contoh.

Contoh 4.3 Diberikan sebuah K-aljabar matriks A berukuran 2×2 yaitu

$$A = M_2(K) = \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa A memiliki empat buah idempoten yaitu $0_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $1_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Jelas bahwa 0_A merupakan idempoten pusat karena untuk setiap $x \in A$ berlaku $x0_A = 0_A x = 0_A$. Diambil sebarang $x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in A$, diperoleh

$$x1_A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1_A x.$$

Dengan demikian 1_A juga merupakan idempoten pusat. Selanjutnya perhatikan bahwa $e_1 e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $e_2 e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga e_1 dan e_2 merupakan idempoten yang saling ortogonal. Selain itu e_1 dan e_2 juga merupakan idempoten primitif karena tidak dapat ditulis sebagai jumlahan dari dua buah idempoten ortogonal tak nol di A. Sedangkan 1_A bukan merupakan elemen idempoten primitif karena $1_A = e_1 + e_2$.

Definisi idempoten pusat yang telah diberikan di atas digunakan untuk menyatakan definisi dari aljabar terhubung berikut.

Definisi 4.4 *Aljabar* A *disebut* ***aljabar terhubung (atau aljabar indekomposabel)*** *jika* A *bukan merupakan jumlahan langsung dari dua aljabar, atau secara ekuivalen,* A *dikatakan aljabar terhubung jika* A *tidak memiliki idempotent pusat selain 0 dan 1.*

Sebagai contohnya perhatikan Contoh 4.3. Aljabar matriks $A = M_2(K)$ merupakan aljabar terhubung karena A tidak memiliki idempoten pusat selain 0_A dan 1_A. Setiap aljabar A memiliki dua idempotent trivial yaitu 0 dan 1. Jika e merupakan idempoten yang tidak trivial dari A maka $1 - e$ juga idempotent yang tidak trivial, dengan sifat e dan $1 - e$ saling ortogonal. Akibat lainnya juga akan terdapat dekomposisi A-modul kanan $A_A = eA \oplus (1-e)A$. Sebaliknya, jika $A_A = M_1 \oplus M_2$ adalah dekomposisi A-modul yang tidak trivial dan $1 = e_1 + e_2$ dengan $e_i \in M_i$, maka e_1, e_2 adalah pasangan idempoten ortogonal dari A, dan $M_i = e_i A$ indekomposabel jika dan hanya jika e_i primitif.

Jika e merupakan idempotent pusat, maka $1 - e$ juga idempotent pusat, sehingga eA dan $(1-e)A$ adalah ideal dua sisi dan keduanya menjadi K-aljabar dengan elemen identitas $e \in eA$ dan $1-e \in (1-e)A$. Pada kasus ini dekomposisi $A_A = eA \oplus (1-e)A$ adalah dekomposisi jumlahan langsung dari aljabar A.

Setiap himpunan $\{e_1, \ldots, e_n\}$ yang merupakan idempoten-idempoten orthogonal primitif dari A dengan sifat $1 = e_1 + \cdots + e_n$ mengakibatkan terdapat sebuah dekomposisi $A_A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ dengan $P_1 = e_1A, \ldots, P_n = e_nA$ merupakan ideal-ideal kanan indekomposabel. Dekomposisi seperti diatas selanjutnya disebut sebagai dekomposisi indekomposabel dan himpunan $\{e_1, \ldots, e_n\}$ disebut himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif dari A.

Contoh 4.5 Diberikan K-aljabar $A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$. Idempoten-idempoten ortogonal primitif dari A adalah $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $e_1 + e_2 + e_3 = 1_A$. Diperoleh

$$e_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_3A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian A memiliki dekomposisi $A = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$ dengan $P_1 = e_1A$, $P_2 = e_2A$, dan $P_3 = e_3A$ merupakan ideal-ideal kanan indekomposabel. Jadi $\{e_1, e_2, e_3\}$ merupakan himpunan lengkap idempoten-idempoten ortogonal primitif dari aljabar A.

Selanjutnya akan diberikan sebuah lema yang menyatakan sifat dari suatu elemen idempoten primitif. Sifat berikut akan sangat bermanfaaat dalam pembuktian sifat-sifat berikutnya.

Lema 4.6 *Sebuah idempoten $e \in A$ primitif jika dan hanya jika aljabar eAe hanya memiliki idempoten* 0 *dan e.*

***Bukti*:**

($\Longrightarrow$) Diketahui $e \in A$ merupakan elemen idempoten primitif, artinya e tidak dapat ditulis sebagai $e = e_1 + e_2$ dengan e_1, e_2 elemen idempoten ortogonal tak nol di A. Diambil sebarang idempoten $x \in eAe$, katakan $x = eae$ dengan $a \in A$.

Karena x merupakan idempoten maka $x^2 = x$ sehingga diperoleh

$$x^2 = (eae)(eae) = eae^2ae$$

$$= eaeae = e(aea)e = exe = x$$

Dengan demikian diperoleh $x = 0$ atau $x = e$.

$(\Leftarrow)$ Akan ditunjukkan dengan kontraposisi. Diandaikan $e \in A$ bukan merupakan elemen idempoten primitif,katakan $e = e_1 + e_2$ dengan $e_1, e_2 \neq 0$ tetapi $e_1e_2 = 0$ dan $e_1e_2 = 0$ atau dengan kata lain e_1, e_2 merupakan idempoten yang saling orthogonal.

Perhatikan bahwa

$$ee_1e = (e_1 + e_2)e_1(e_1 + e_2)$$

$$= (e_1e_1 + e_2e_1)(e_1 + e_2)$$

$$= e_1e_1e_1 + e_1e_1e_2 + e_2e_1e_1 + e_2e_1e_2$$

$$= e_1$$

Diperoleh idempoten $e_1 \in eAe$.

Dengan demiian aljabar eAe memiliki idempoten selain 0 dan e. Terjadi kontradiksi sehingga e merupakan elemen idempoten primitif. ■

Setelah diberikan pengertian dari idempoten ortogonal primitif, berikut akan diberikan lema yang mengatakan bahwa himpunan semua lintasan stasioner dari KQ merupakan himpunan lengkap idempoten-idempoten ortogonal primitif.

Lema 4.7 *Diberikan sebuah quiver berhingga* Q. *Elemen* $1 = \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ *merupakan identitas dari* KQ *dan* $\{\varepsilon_a | a \in Q_0\}$ *yang merupakan himpunan dari semua lintasan stasioner* $\varepsilon_a = (a||a)$ *adalah himpunan lengkap idempoten-idempoten ortogonal primitif untuk* KQ.

Bukti:

Sesuai dengan definisi pergandaan, ε_a merupakan idempoten ortogonal untuk KQ. Karena Q_0 berhingga, maka $1 = \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ adalah identitas dari KQ. Selanjutnya tinggal ditunjukkan bahwa ε_a primitif, atau ekuivalen dengan menunjukkan bahwa aljabar $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_a$ tidak memiliki idempoten selain 0 dan ε_a.

Diambil sebarang idempoten $\varepsilon \in \varepsilon_a(KQ)\varepsilon_a$. Jelas bahwa ε dapat ditulis dengan $\varepsilon = \leftthreetimes\, \varepsilon_a + w$, dengan $\leftthreetimes \in K$ dan w adalah kombinasi linier dari siklus-siklus yang memuat a dengan panjang ≥ 1. Karena ε idempoten maka $\varepsilon^2 = \varepsilon$, sehingga diperoleh persamaan

$$0 = \varepsilon^2 - \varepsilon = (\leftthreetimes^2 - \leftthreetimes)\varepsilon_a + (2\leftthreetimes - 1)w + w^2.$$

Dari persamaan diatas diperoleh $w = 0$ dan $\leftthreetimes^2 - \leftthreetimes = 0$, sehingga $\leftthreetimes = 0$ atau $\leftthreetimes = 1$. Jika $\leftthreetimes = 1$, maka $\varepsilon = \leftthreetimes\, \varepsilon_a + w = \varepsilon_a$. Di sisi lain jika $\leftthreetimes = 0$, maka $\varepsilon = \leftthreetimes\, \varepsilon_a + w = 0$. Dengan demikian $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_a$ tidak memiliki idempoten selain 0 dan ε_a, sehingga terbukti ε_a primitif. ■

Himpunan $\{\varepsilon_a | a \in Q_0\}$ yang merupakan himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif untuk KQ tidak selalu tunggal. Seperti pada contoh 3.6(2), selain himpunan $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, himpunan $\{\varepsilon_1 + \alpha, \varepsilon_2 - \alpha\}$ juga merupakan himpunan lengkap idempotent ortogonal primitif untuk KQ.

Berikutnya akan diberikan sebuah lema yang menyatakan keterkaitan suatu aljabar dengan partisi himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif untuk aljabar tersebut.

Lema 4.8 *Diberikan A aljabar asosiatif dengan elemen identitas, dan dimisalkan bahwa $\{e_1, \dots, e_n\}$ adalah himpunan lengkap berhingga dari idempotent-idempoten orthogonal primitif. Aljabar A terhubung jika dan hanya jika tidak terdapat suatu partisi yang tidak trivial $I \dot{\cup} J$ dari himpunan $\{1,2,\dots,n\}$ sedemikian hingga untuk $i \in I$ dan $j \in J$ berakibat $e_iAe_j = 0 = e_jAe_i$.*

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diandaikan terdapat sebuah partisi yang tidak trivial dan dimisalkan $c = \sum_{j\in J} e_j$. Karena partisi tersebut tidak trivial, maka $c \neq 0$ dan $c \neq 1$. Dan karena e_j merupakan idempoten-idempoten otrogonal, maka c merupakan idempoten. Untuk setiap $i \in I$, $ce_i = e_ic = 0$, dan untuk setiap $j \in J$, $ce_j = e_jc = e_j$. Selanjutnya diambil sebarang $a \in A$. Dari yang diketahui $e_iae_j = 0 = e_jae_i$, ketika $i \in I$ dan $j \in J$. Akibatnya

$$ca = \left(\textstyle\sum_{j\in J} e_j\right)a = \left(\textstyle\sum_{j\in J} e_j\, a\right)1$$
$$= \left(\textstyle\sum_{j\in J} e_j\, a\right)\left(\textstyle\sum_{i\in I} e_i + \sum_{k\in J} e_k\right)$$
$$= \textstyle\sum_{j,k\in J} e_jae_j$$
$$= \left(\textstyle\sum_{j\in J} e_j + \sum_{i\in I} e_i\right)a\left(\textstyle\sum_{k\in J} e_k\right) = ac.$$

Jadi c adalah idempoten pusat, dan $A = cA \oplus (1-c)A$ adalah dekomposisi yang tidak trivial dari A. Terjadi kontradiksi karena diketahui A aljabar terhubung.

($\Longleftarrow$) Diandaikan aljabar A tidak terhubung, maka sesuai definisi A memuat idempoten pusat c dengan $c \neq 0$ dan $c \neq 1$. Diperoleh

$$c = 1.c.1 = \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} e_i\right)c\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} e_j\right)$$
$$= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} e_ice_j = \sum_{i=1}^{n} e_ice_i,$$

karena c pusat. Diambil $c_i = e_ice_i \in e_iAe_i$, maka diperoleh

$$c_i{}^2 = (e_ice_i)(e_ice_i) = e_ic^2e_i = c_i,$$

sehingga c_i idempoten dari e_iAe_i. Karena e_i primitif, $c_i = 0$ atau $c_i = e_i$. Misalkan $I = \{i | c_i = 0\}$ dan $J = \{i | c_i = e_i\}$. Karena $c \neq 0,1$, jelas $I \dot{\cup} J$ sebuah partisi yang tidak trivial dari $\{1,2,\dots,n\}$. Jika $i \in I$, diperoleh $ce_i = e_ic = 0$, dan jika $j \in J$, diperoleh $ce_j = e_jc = e_j$. Dengan demikian, jika $i \in I$ dan $j \in J$, diperoleh

$$e_iAe_j = e_iAce_j = e_icAe_j = 0.$$

Secara analog diperoleh juga $e_jAe_i = 0$. ∎

Dari beberapa sifat di atas dapat ditarik syarat perlu dan cukup dari suatu aljabar lintasan terhubung. Telah ditunjukkan pada Lema 4.7 bahwa $\{\varepsilon_a | a \in Q_0\}$ yang merupakan himpunan dari semua lintasan stasioner $\varepsilon_a = (a||a)$ adalah himpunan lengkap idempoten-idempoten ortogonal primitif untuk aljabar lintasan KQ. Padahal menurut Lema 4.8 dikatakan suatu aljabar terhubung jika dan hanya jika himpunan lengkap idempoten-idempoten ortogonal primitif tidak terpartisi. Dengan demikian aljabar lintasan KQ dari suatu quiver Q merupakan aljabar terhubung jika dan hanya jika $\{\varepsilon_a | a \in Q_0\}$ yang merupakan himpunan dari semua lintasan stasioner $\varepsilon_a = (a||a)$ tidak terpartisi. Hal tersebut hanya akan terpenuhi jika Q merupakan quiver terhubung. Lebih jelasnya akan ditunjukkan dalam teorema sebagai berikut.

Teorema 4.9 *Diberikan Q quiver berhingga. Aljabar lintasan KQ terhubung jika dan hanya jika Q quiver terhubung.*

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui KQ terhubung. Diandaikan Q tidak terhubung, dan misalkan Q' komponen terhubung dari Q. Misalkan Q'' subquiver penuh dari Q yang memiliki himpunan titik $Q_0'' = Q_0 \backslash Q_0'$. Jelas bahwa Q' maupun Q'' tidak kosong. Diambil $a \in Q_0'$ dan $b \in Q_0''$. Karena Q tidak terhubung, maka sebarang lintasan w di Q berada di salah satu Q' atau Q''. Dipilih kasus jika $w\varepsilon_b = 0$ maka $\varepsilon_a w \varepsilon_b = 0$. Kasus yang lain, jika $\varepsilon_a w = 0$ maka $\varepsilon_a w \varepsilon_b = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $\varepsilon_a (KQ) \varepsilon_b = 0$ dan juga $\varepsilon_b (KQ) \varepsilon_a = 0$. Dengan Lema 4.8, diperoleh KQ tidak terhubung, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi Q adalah quiver terhubung.

($\Longleftarrow$) Diketahui Q adalah quiver terhubung. Diandaikan KQ tidak terhubung. Dengan Lema 4.8, maka terdapat partisi gabungan terpisah $Q_0 = Q_0' \dot{\cup} Q_0''$ sedemikian hingga jika $x \in Q_0'$ dan $y \in Q_0''$ maka $\varepsilon_x (KQ) \varepsilon_y = 0 = \varepsilon_y (KQ) \varepsilon_x$. Karena Q terhubung maka terdapat $a \in Q_0'$ dan $b \in Q_0''$ yang bertetangga. Tanpa mengurangi keumuman, terdapat panah $\alpha : a \longrightarrow b$ karena a dan b bertentangga. Akan tetapi diperoleh $\varepsilon_a \alpha \varepsilon_b \in \varepsilon_a (KQ) \varepsilon_b = 0$, terjadi kontradiksi. Jadi, KQ adalah aljabar terhubung. ∎

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa keterhubungan suatu aljabar lintasan terkait erat dengan quivernya. Telah ditunjukkan bahwa suatu aljabar lintasan KQ dari suatu quiver Q merupakan aljabar terhubung jika dan hanya jika Q merupakan quiver terhubung. Hasil dari penelitian ini dapat menjadi dasar untuk penelitian lebih lanjut dengan mempelajari teori representasi dan kategori. Sebagaimana disebutkan Savage (2006), bahwa kategori modul-modul berdimensi hingga atas aljabar lintasan KQ ekuivalen dengan kategori representasi-representasi berdimensi hingga dari quiver Q.

ISSN-p: 2338-0950
ISSN-e : 2541-1969

DAFTAR PUSTAKA

Abrams, G., Kanuni, M., 2013, *Cohn path algebras have Invariant Basis Number*. ArXiV: 1303.2122v2.

Alahmadi, A., Alsulami, H., 2014, *Simplicity of the Lie algebra of skew symmetric elements of a Leavitt path algebra*. ArXiv:1304.2385.

Ara, P., Corti˜nas, G., 2013, *Tensor products of Leavitt path algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 141(8): 2629 – 2639.

Assem, I., Simson, D. & Skowronski, A., 2005 *Elemens of the Representation Theory of Associative Algebras,* London Math.Soc Student Text 65. Cambridge University Press.

Dummit, D.S., and Foote, R.M., 2004, *Abstract Algebra, Third Edition,* John Wiley & Sons, United State of America.

Hazrat, R., 2013, *A note on the isomorphism conjectures for Leavitt path algebras*, J. Algebra 375 : 33–40.

Rodriguez, M.A., Neubauer, P., 2011, *A path algebra for multi-relational graphs*, Proceedings of the 2011 IEEE 27th International Conference on Data Engineering Workshops, Vol. April 11-16 : 128-131.

Ruiz, E., Tomforde, M., 2013, *Classification of unital simple Leavitt path algebras of infinite graphs*, J. Algebra 384 45–83.

Savage A., 2006, *Finite-dimensional algebras and quivers*, Encyclopedia or Mathematical Physics, 2 : 313-320.

Tomforde, M., 2011, *Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring*, J. Pure Appl. Algebra 215(4) : 471-484.